

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di algebra matriciale</b>	<b>4</b>
1.1	Introduzione	4
1.1.1	Rango di una matrice	6
1.1.2	Traccia di una matrice	8
1.1.3	Matrice inversa	9
1.1.4	Matrici ortogonali	14
1.1.5	Matrici idempotenti	14
1.1.6	Forme quadratiche	16
1.2	Calcolo differenziale con vettori e matrici	16
1.2.1	Gradiente di una funzione	16
1.2.2	Hessiano di una funzione	16
1.2.3	Derivate di forme lineari e quadratiche	17
1.2.4	Derivate di inverse e di determinanti	18
1.3	Autovalori e autovettori	19
1.3.1	Definizione di autovettore e autovalore	19
1.3.2	Proprietà generali degli autovalori	20
1.3.3	Autovalori e autovettori di matrici simmetriche	21
<b>2</b>	<b>Vettori aleatori</b>	<b>25</b>
2.1	Momenti primo e secondo multivariati di vettori aleatori	25
2.1.1	Momenti di una trasformata lineare di un vettore aleatorio	27
2.2	Analisi delle componenti principali (ACP), solo cenni	36
2.2.1	Significato statistico e probabilistico delle componenti principali	39
<b>3</b>	<b>Variabili Statistiche Multiple</b>	<b>40</b>
3.1	Calcoli statistici in notazione vettoriale	41
3.1.1	Espressione della varianza di una variabile statistica	41
3.2	Definizione della matrice dei dati	45
3.2.1	Dati mancanti	47
3.3	I momenti primi e secondi multivariati	48
3.3.1	La matrice di varianza e covarianza	50
3.3.2	La matrice di correlazione	50
3.3.3	esempio	52
3.4	La matrice degli scarti	54
3.4.1	I momenti di combinazioni lineari di variabili statistiche multiple	56
3.4.2	Rango della matrice di Varianze e Covarianze	58

<b>4</b>	<b>link esterni e argomenti mancanti</b>	<b>59</b>
4.1	Cenni all'analisi in componenti principali . . . . .	62
4.1.1	Richiamo su autovalori e autovettori . . . . .	64
4.1.2	Esempio . . . . .	68
4.2	<b>ANALISI DELLE COMPONENTI PRINCIPALI</b> . . . . .	84
4.2.1	ACP per variabili statistiche osservate . . . . .	89
4.2.2	Distribuzione campionaria degli autovalori . . . . .	93
4.2.3	significato dei primi due momenti multivariati empirici . . . . .	95

BOZZE MARCELLO CHIODI 2020

## Elenco delle figure

3.1	matrice di grafici di 4 variabili . . . . .	52
3.2	Matrice di correlazione delle 4 variabili dell'esempio dei neonati . . . . .	53
4.1	Tre variabili correlate: matrice di grafici di punti di tre variabili molto correlate; tuttavia il rango della matrice di varianza e covarianze è 3 perchè non vi sono vincoli lineari esatti. . . . .	63
4.3	Tre variabili standardizzate correlate (matrix plot) . . . . .	85
4.4	Le tre componenti principali (matrix plot) . . . . .	86
4.5	Tre variabili standardizzate correlate . . . . .	87
4.6	Le tre componenti principali . . . . .	88
4.7	Retta di minima distanza (ortogonale!) dai punti osservati: regressione principale . . . . .	91

# Capitolo 1

## Richiami di algebra elementare delle matrici per lo studio dei modelli statistici lineari

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1.1	Rango di una matrice	6
1.1.2	Traccia di una matrice	8
1.1.3	Matrice inversa	9
1.1.4	Matrici ortogonali	14
1.1.5	Matrici idempotenti	14
1.1.6	Forme quadratiche	16
<b>1.2</b>	<b>Calcolo differenziale con vettori e matrici</b>	<b>16</b>
1.2.1	Gradiente di una funzione	16
1.2.2	Hessiano di una funzione	16
1.2.3	Derivate di forme lineari e quadratiche	17
1.2.4	Derivate di inverse e di determinanti	18
<b>1.3</b>	<b>Autovalori e autovettori</b>	<b>19</b>
1.3.1	Definizione di autovettore e autovalore	19
1.3.2	Proprietà generali degli autovalori	20
1.3.3	Autovalori e autovettori di matrici simmetriche	21

---

### 1.1 Introduzione

E' un richiamo delle nozioni e degli strumenti tecnici necessari per una trattazione agevole degli argomenti che coinvolgono, in varia misura, vettori di variabili casuali

e vettori di variabili casuali normali. La strumentazione di calcolo vettoriale e matriciale è anche essenziale per lo studio delle variabili statistiche multiple e per lo studio dei modelli lineari.

Sebbene questi appunti siano stati concepiti come supporto ad alcuni dei miei corsi per studenti di area statistica, possono essere un breviario utile per corsi di analisi statistica multivariata e analisi dei modelli lineari di dipendenza.

- Ove possibile, viene enfatizzato il significato statistico e/o probabilistico delle proprietà delle matrici richiamate.
- In particolare verranno evidenziate alcune proprietà di matrici di varianza e covarianza, sia per vettori di variabili aleatorie che variabili statistiche multiple (rilevate attraverso una matrice di dati).
- Sebbene le proprietà del calcolo matriciale siano comunque importanti, ho evidenziato qui solo quelle che nel resto del corso vengono utilizzate.
- Presuppongo che lo studente che legge questa sezione abbia le necessarie nozioni di algebra lineare (*ed eventualmente questo è il momento buono per aggiornare o integrare le proprie nozioni*).
- Queste nozioni sono essenziali per lo studio dei modelli lineari: tale studio risulterà in questo modo molto scorrevole e di semplice comprensione (spero!).
- Lo studio delle proprietà delle matrici e dei vettori di variabili casuali è anche finalizzato allo studio delle variabili aleatorie con distribuzione normale multivariata, modello parametrico multivariato importante per uno studio approfondito dei modelli lineari.

In molti esempi e casi di studio esposti in queste pagine, si ha a che fare in vario modo con problemi che coinvolgono  $p$  variabili rilevate su  $n$  unità (in generale tratterò, nel corso sui modelli lineari, sia variabili quantitative che qualitative, ma in questo richiamo su matrici e vettori aleatori mi riferisco solo a variabili quantitative; eventualmente qualche variabile può essere costituita solo da 0 e 1).

Accade spesso che di queste variabili una sia oggetto di interesse e che se ne voglia studiare la dipendenza dalle altre; in altre situazioni magari vogliamo studiare il comportamento simultaneo delle variabili.

Talora le  $n$  osservazioni sono da considerarsi come un campione casuale semplice da una qualche distribuzione multivariata, oppure come determinazioni di variabili che contengono delle componenti aleatorie (come per esempio nei modelli lineari)

In ogni caso non v'è dubbio che è utile definire (o ricordare) alcuni concetti relativi alle distribuzioni di vettori aleatori, per generalizzare la definizione di momento già nota nel caso univariato, almeno per il momento primo e secondo; sebbene i risultati che vedremo abbiano validità generale, uno degli scopi sarà quello di impadronirci degli strumenti tecnici necessari per lo studio dei modelli lineari e della distribuzione normale multivariata e per apprezzarne l'importanza come modello di base per i modelli di dipendenza e di regressione lineare semplice e multipla.

Un altro motivo dell'importanza degli strumenti di questo capitolo è la familiarizzazione con il linguaggio dei vettori e delle matrici, che consente in molti problemi

multivariati di adottare una notazione compatta, semplice e del tutto analoga a quella univariata, come si vede anche nel capitolo sulle matrici di dati e la notazione matriciale per i calcoli statistici. In effetti gli strumenti tecnici di questo capitolo sono necessari per lo studio dei seguenti argomenti:

- combinazioni (lineari) di variabili casuali
- distribuzione normale multivariata
- forme quadratiche in variabili casuali normali
- inferenza nei modelli statistici lineari
- regressione multipla
- GLM (generalized linear models)
- Modelli di dipendenza non parametrica
- analisi componenti principali per vettori aleatori
- analisi serie temporali
- analisi esplorativa dei dati
- tecniche multivariate
- Qualsiasi altra tecnica statistica moderna non esplicitamente citata nei punti precedenti...

un esempio

La normale multivariata

### 1.1.1 Rango di una matrice

Il rango di una matrice  $\mathbf{A}$  qualsiasi,  $\rho(\mathbf{A})$ , è definito come:

**il massimo numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti** oppure:

il massimo ordine per il quale si possono estrarre minori non tutti nulli da una matrice qualsiasi  $\mathbf{A}$ .

Alcune proprietà del rango di una matrice:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{A}^\top) &= \rho(\mathbf{A}) \\ \rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) &= \rho(\mathbf{A} \mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A}) \\ \rho(\mathbf{A} \mathbf{B}) &\leq \min \{ \rho(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{B}) \} \\ \rho(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &\leq \rho(\mathbf{A}) + \rho(\mathbf{B})\end{aligned}$$

### Rango della matrice di varianza e covarianza di un vettore aleatorio:

- Se in un vettore aleatorio composto da  $p$  v.a. elementari, una componente è combinazione lineare delle altre, allora il rango della matrice di varianza e covarianza di  $\mathbf{X}$  risulta uguale (al più) a  $p - 1$ ;
- in generale il rango di  $V[\mathbf{X}]$  risulta uguale a  $p - k$  se esattamente  $k$  componenti sono ottenute attraverso combinazioni lineari (indipendenti) degli elementi di  $\mathbf{X}$ .
- Il rango di  $V[\mathbf{X}]$  risulta uguale esattamente a  $p$  (ossia a rango pieno) se e solo se le componenti di  $\mathbf{X}$  sono linearmente indipendenti.

Nel caso di matrici di dati occorrerà specificare che  $n \geq p$ . Se invece  $n < p$ , ossia le variabili sono più delle unità, il rango sarà senz'altro inferiore a  $p$  e quindi esisteranno senz'altro dei vincoli lineari fra le variabili

**Esempio 1.1.1** Ad esempio sia  $\mathbf{X}$  una variabile aleatoria doppia, con componenti  $X_1$  e  $X_2$  con speranze matematiche nulle e matrice di varianza e covarianza (per ipotesi di rango 2):

$$V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

essendo  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ . Se otteniamo ora un nuovo vettore aleatorio  $\mathbf{Y}$  a tre componenti, con:

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1 \\ y_2 &= X_2 \\ y_3 &= 2X_1 + 3X_2, \end{aligned}$$

abbiamo utilizzato in pratica una matrice di trasformazione:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

così che  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$  corrisponde alla trasformazione prima definita.

Per ottenere la matrice di varianza e covarianza di  $\mathbf{Y}$  dovremo utilizzare la regola:

$$V[\mathbf{Y}] = \mathbf{A} V[\mathbf{X}] \mathbf{A}^\top,$$

ottenendo:

$$V[\mathbf{Y}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_1 : \\ r_2 : \\ r_3 : \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 2\sigma_1^2 + 3\sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 2\sigma_{12} + 3\sigma_2^2 \\ 2\sigma_1^2 + 3\sigma_{12} & 2\sigma_{12} + 3\sigma_2^2 & 4\sigma_1^2 + 12\sigma_{12} + 9\sigma_2^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

E' immediato verificare che la terza riga (colonna) di  $V[\mathbf{Y}]$  si ottiene come combinazione lineare delle prime due righe:

$$r_3 = 2r_1 + 3r_2,$$

ossia lo stesso vincolo lineare esistente fra le componenti di  $\mathbf{y}$ .

Pertanto  $\rho(V[\mathbf{Y}]) = 3 - 1 = 2$ .

### Rango della matrice di varianza e covarianza e relazioni fra variabili

La sola conoscenza del rango di una matrice di varianza e covarianza ci dice poco sul tipo di interrelazioni (eventualmente lineari) esistenti fra le  $p$  componenti del vettore aleatorio: ci dice solo se esistono uno o più legami lineari esatti.

Esistono altre indicatori associati alle matrici di varianza e covarianza che ci consentono di sapere qualcosa di più su tali interrelazioni.

#### 1.1.2 Traccia di una matrice

La traccia di una matrice  $\mathbf{A}_{[p \times p]}$  quadrata,  $tr(\mathbf{A})$ , è definita come la somma degli elementi sulla diagonale principale:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p a_{ii}$$

Alcune proprietà della traccia di una matrice:

•

$$tr(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = tr(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k a_{ij}^2$$

( $\mathbf{A}$  con  $p$  righe e  $k$  colonne)

- $tr(c\mathbf{A}) = c tr(\mathbf{A})$
- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$  ( $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  quadrate dello stesso ordine)
- $tr(\mathbf{A}\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}\mathbf{A})$  ( $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  quadrate dello stesso ordine)

### Traccia della Matrice di Varianze e covarianze

Se  $\mathbf{X}$  è un qualsiasi vettore aleatorio a  $p$  componenti con matrice di varianza e covarianza  $V[\mathbf{X}]$ , la traccia di  $V[\mathbf{X}]$  corrisponde alla somma delle varianze delle componenti di  $\mathbf{X}$ , ossia alla somma delle dispersioni lungo gli assi coordinati:

$$tr(V[\mathbf{X}]) = \sum_{i=1}^p V[X_i] = \sum_{i=1}^p \sigma_i^2$$

### Varianza generalizzata

Un'altra misura di variabilità di una variabile aleatoria multipla  $\mathbf{X}$  è la varianza generalizzata (Wilks, 1932)

$$V_g[\mathbf{X}] = \text{Det}[V[\mathbf{X}]].$$

Il significato, anche in termini geometrici, di tale misura sarà più chiaro più avanti, in termini di autovalori e di ellissoidi di equiprobabilità per variabili normali multiple. Possiamo però vedere che  $V_g[\mathbf{X}]$  può essere nulla anche se tutte le varianze sono maggiori di zero, e precisamente nel caso in cui  $V[\mathbf{X}]$  è di rango non pieno, ossia esiste almeno un vincolo lineare esatto fra le componenti di  $\mathbf{X}$ .

(La varianza generalizzata può essere ben interpretata per distribuzioni condizionate di variabili normali multivariate; ma anche come prodotto degli autovalori, ossia delle varianze delle componenti principali; o come volume dell'ellissoide di equiprobabilità in una normale multivariata)

### 1.1.3 Matrice inversa

Data una matrice quadrata  $\mathbf{A}$ , ( $\mathbf{A}_{[p \times p]}$ ), con  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , si definisce inversa di  $\mathbf{A}$ , e si indica con  $\mathbf{A}^{-1}$ , una matrice tale che:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_p \quad \text{matrice identità}$$

La condizione  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , ossia che  $\mathbf{A}$  sia di rango pieno, è necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità di  $\mathbf{A}^{-1}$ .

E' noto infatti che l'elemento generico della matrice inversa  $(\mathbf{A})^{-1}$  è dato da:

$$\{\mathbf{A}^{-1}\}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ji}}{|\mathbf{A}|}$$

essendo  $\mathbf{A}_{ij}$  il cofattore di  $a_{ij}$ ;

## Inversa di una matrice quadrata a rango pieno

Pertanto l'inversa è uguale alla trasposta della matrice aggiunta diviso il determinante della matrice.

$$\{A^{-1}\}_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

essendo  $A_{ij}$  il cofattore di  $a_{ij}$  ;

Ovviamente è una definizione utile solo per la dimostrare l'esistenza dell'inversa, ma non è conveniente numericamente per il calcolo: meglio ricorrere al metodo di Gauss-Siedel, o ad altri metodi di riduzione con la ricerca di elementi di pivot.

E' evidente che si farà ricorso, come sempre, a software matematico statistico, fornito sempre di buone routines per il calcolo dei determinanti e dell'inversa di una matrice: occorre comunque sempre accertarsi del grado di precisione fornito dal software usato, e cercare di usare la massima precisione numerica possibile; <sup>1</sup>

Il software R, con licenza di tipo *public domain*, ha degli algoritmi comunque ottimizzati per il calcolo matriciale (estremamente semplice da usare, dato che gli enti fondamentali in questo linguaggio sono le matrici e gli array, che si manipolano con funzioni che accettano matrici come argomenti). Per impiegare al meglio R per l'algebra lineare, occorre installare R con le librerie *openblas*, in modo tale che R usi un set di istruzioni ottimizzate per buona parte di processori.

## ALCUNE PROPRIETÀ DELL'INVERSA DI UNA MATRICE

$A, B$ quadrate di rango pieno	
$(A^T)^{-1}$	= $(A^{-1})^T$
$(A^{-1})^{-1}$	= $A$
$A^{-1}$ è simmetrica	se e solo se $A$ è simmetrica
$A^{-1}$ è diagonale	se e solo se $A$ è diagonale
$ A^{-1} $	= $ A ^{-1}$
$(AB)^{-1}$	= $B^{-1}A^{-1}$

<sup>1</sup>ad esempio alcuni software nella risoluzione di sistemi di equazioni lineari, utilizzano una "extended precision calculation" che è sempre bene usare

## Significato degli elementi dell'inversa di una matrice di varianza e covarianza

Anche gli elementi dell' inversa di una matrice di varianza e covarianza hanno un preciso significato probabilistico statistico in termini di distribuzioni condizionate, [link con \(vedere anche → normale multivariata \)](#)

come si vedrà più avanti a proposito della normale multivariata.

Gli elementi non diagonali sono funzione della correlazione lineare condizionata, mentre gli elementi diagonali sono legati alla correlazione multipla. adv.

## Inversa di una matrice simmetrica partizionata

Supponiamo di avere una matrice simmetrica partizionata in quattro blocchi:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right)$$

(primo e quarto blocco quadrati, e  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}$ ) Poniamo intanto:  $\mathbf{A}_{11.2} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{12}^T$  il motivo di questa notazione sarà chiarissimo (o almeno un po' meno oscuro di quanto non sia adesso) nel capitolo sulle distribuzioni condizionate di variabili normali multivariate. [link con distribuzioni condizionate di variabili normali](#)

Si può dimostrare che, se esiste  $\mathbf{A}_{22}^{-1}$ , l'inversa della matrice partizionata può essere espressa come:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11.2}^{-1} & -\mathbf{A}_{11.2}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathbf{A}_{11.2}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1}[\mathbf{A}_{12}^T\mathbf{A}_{11.2}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{I}] \end{array} \right)$$

Si ha anche:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{12}^T| |\mathbf{A}_{22}| = |\mathbf{A}_{11.2}| |\mathbf{A}_{22}|$$

Il risultato sull'inversa di una matrice partizionata, arduo da ricordare, si dimostra effettuando il prodotto (sia destro che sinistro) per la matrice originaria partizionata  $\mathbf{A}$  e verificando che si ottiene la matrice identità.

Questo risultato è utile per ricavare le distribuzioni condizionate di variabili normali multivariate.

Nella regressione lineare multipla può servire il risultato particolare nel caso in cui  $\mathbf{A}_{11}$  è uno scalare  $a$  e quindi  $\mathbf{A}_{12}$  è un vettore riga che indico con  $\mathbf{y}^T$ . Il risultato è utile per esempio quando si aggiunge una riga, ossia si aggiunge una variabile, ad una matrice di varianza e covarianza di cui già si conosce l'inversa.

Abbiamo quindi:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^T \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right)$$

Si ha allora:

$$a_{11.2} = a - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{y}$$

e quindi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1/a_{11.2} & -\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1}/a_{11.2} \\ \hline -\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1}/a_{11.2} & \mathbf{A}_{22}^{-1}[\mathbf{y}\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1}/a_{11.2} + \mathbf{I}] \end{array} \right)$$

semplificabile in:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11.2}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & -\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{y}\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{I}a_{11.2}) \end{array} \right)$$

Si ha in questo caso anche:

$$|\mathbf{A}| = |a - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{y}| |\mathbf{A}_{22}| = |a_{11.2}| |\mathbf{A}_{22}|$$

### Determinante e inversa di una matrice simmetrica orlata

Il risultato relativo a matrici  $\mathbf{A}$  simmetriche orlate, o partizionate in una riga e  $(p - 1)$  righe (e quindi 1 colonna e  $(p - 1)$  colonne) può essere ricavato in modo diretto senza far ricorso al risultato generale.

Il risultato è utile per ricavare le formule relative alla devianza spiegata nella regressione multipla e per ottenere gli indici di correlazione lineare parziale e sarà applicato a matrici di correlazione o di varianza e covarianza.

Sarà utile per attribuire un significato statistico agli elementi dell'inversa di una matrice di varianza e covarianza<sup>2</sup>

Supponiamo quindi di avere una matrice simmetrica  $\mathbf{A}$  di rango pieno  $p$  così partizionata:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^\top \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right)$$

ove:

- $a$  è uno scalare
- $\mathbf{y}^\top$  è un vettore riga
- $\mathbf{A}_{22}$  è una matrice di rango  $p - 1$  (ovviamente simmetrica) di cui si conoscono l'inversa  $(\mathbf{A}_{22})^{-1}$  e il determinante  $|\mathbf{A}|$ .

Troviamo prima il determinante di  $\mathbf{A}$  in funzione di quello di  $\mathbf{A}_{22}$ .

Consideriamo una matrice  $\mathbf{B}$  (partizionata in quattro parti delle stesse dimensioni delle parti di  $\mathbf{A}$ ) così definita:

$$\mathbf{B} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \mathbf{0} & (\mathbf{A}_{22})^{-1} \end{array} \right)$$

E' facile vedere, effettuando il prodotto  $\mathbf{AB}$ , che si ha:

$$\mathbf{AB} = \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^\top \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \mathbf{0} & (\mathbf{A}_{22})^{-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

<sup>2</sup>Dal momento che il risultato verrà utilizzato più volte in questo testo, ho ritenuto utile inserirne anche una dimostrazione elementare, che non è comunque essenziale per l'impiego successivo che faremo del risultato di questa sezione nella regressione parziale e multipla

Per l'ultima matrice è facile vedere che:

$$\left| \left( \begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \\ \mathbf{y} & \mathbf{I} \end{array} \right) \right| = a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y}$$

Mettendo insieme le relazioni precedenti e applicando le proprietà dei determinanti di prodotti di matrici si ha:

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y}$$

Dal momento che si ha anche evidentemente:

$$|\mathbf{B}| = \left| \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_{22})^{-1} \end{array} \right) \right| = |(\mathbf{A}_{22})^{-1}| = 1/|\mathbf{A}_{22}|,$$

mettendo insieme le ultime due relazioni si ha infine:

$$|\mathbf{A}| = \frac{a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y}}{|\mathbf{B}|} = (a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y})|\mathbf{A}_{22}|. \quad (1.1)$$

Questo risultato consente semplicemente si ottenere esplicitamente il primo elemento dell'inversa di  $\mathbf{A}$ , ossia  $\{(\mathbf{A})^{-1}\}_{11}$ . Infatti:

$$\{(\mathbf{A})^{-1}\}_{11} = \frac{\text{cofattore}(\{\mathbf{A}\}_{11})}{|\mathbf{A}|}$$

Dato che:

$$\text{cofattore}(\{\mathbf{A}\}_{11}) = |\mathbf{A}_{22}| \quad \text{e} \quad |\mathbf{A}| = (a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y})|\mathbf{A}_{22}|$$

si ha:

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{A})^{-1}\}_{11} &= \frac{\text{cofattore}(\{\mathbf{A}\}_{11})}{|\mathbf{A}|} = \frac{|\mathbf{A}_{22}|}{(a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y})|\mathbf{A}_{22}|} = \\ &= \frac{1}{a - \mathbf{y}^\top (\mathbf{A}_{22})^{-1} \mathbf{y}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

adv.

### Matrice inversa generalizzata

In certi casi, ad esempio per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari a rango non pieno, conviene ricorrere alla cosiddetta inversa generalizzata.

inserire almeno un esempio numerico,  
se no il paragrafo non funziona

Data una matrice (anche rettangolare) di rango qualsiasi  $\mathbf{A}$ , si definisce inversa generalizzata di  $\mathbf{A}$ , e si indica con  $\mathbf{A}^-$ , una matrice tale che:

$$\mathbf{AA}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

L'inversa generalizzata di una qualsiasi matrice non è unica, tranne che per le matrici quadrate di rango pieno, per le quali si ha chiaramente:  $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^{-1}$

L'inversa generalizzata fornisce una delle soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

di rango anche non pieno, ovviamente nel caso in cui siano soddisfatte le condizioni per l'esistenza di soluzioni, ossia  $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ .

Infatti con successive trasformazioni:

$$(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad (\mathbf{AA}^-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b};$$

$$(\mathbf{AA}^-)(\mathbf{Ax}) = \mathbf{b} \quad (\mathbf{AA}^-)\mathbf{b} = \mathbf{b};$$

e infine:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^-\mathbf{b}) = \mathbf{b},$$

per cui  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b}$  è una soluzione del sistema originario.

Se la matrice  $\mathbf{A}$  è simmetrica valgono ulteriori proprietà. Si vedrà poi che mediante la decomposizione spettrale è possibile determinare una inversa generalizzata di una matrice simmetrica.

In effetti la definizione di inversa generalizzata è utile essenzialmente perchè consente di esprimere in modo compatto una generica soluzione di un sistema di equazioni lineari anche di rango non pieno.

#### 1.1.4 Matrici ortogonali

Si definisce ortogonale una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di  $p$  righe e  $p$  colonne la cui trasposta coincide con l'inversa:

**Definizione di matrice ortogonale  $\mathbf{A}$**

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

#### 1.1.5 Matrici idempotenti

Si definisce idempotente una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di  $p$  righe e  $p$  colonne uguale al proprio quadrato:

**Definizione di matrice idempotente  $\mathbf{A}$**

$$\mathbf{A} = \mathbf{AA}$$

Se  $\mathbf{A}$  è idempotente allora valgono le seguenti proprietà:

$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \dots = \mathbf{A}^n \quad \forall n, \quad n > 0$      $\mathbf{A}$  è uguale a tutte le sue potenze  
 $\mathbf{A}^n$  è idempotente  $\forall n, \quad n > 0$ .    Tutte le potenze di  $\mathbf{A}$  sono idempotenti  
 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  è idempotente infatti:

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \mathbf{A}][\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= \mathbf{I}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \\ &= \mathbf{I} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A})$$

La traccia di  $\mathbf{A}$  è uguale al suo rango

Indicando con  $\lambda_i$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$  si ha:

$$\begin{cases} \lambda_i = 1 & \text{se } i = 1, 2, \dots, \rho(\mathbf{A}) \\ \lambda_i = 0 & \text{se } i = \rho(\mathbf{A}) + 1, \dots, p \end{cases}$$

Infatti dal momento che gli autovalori delle potenze di una matrice sono uguali alle potenze degli autovalori, essendo  $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ , si deve avere  $\lambda_i = \lambda_i^2$ , per cui  $\lambda_i$  può essere solo 0 o 1.

Risulta ovvio dalla definizione che l'unica matrice idempotente di rango pieno è la matrice identità; gli scalari idempotenti sono 0 e 1.

### Esempio

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T, \quad \forall \mathbf{X}, \quad \text{purchè esista: } (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$$

è una matrice idempotente (con  $\rho(\mathbf{H}) = \rho(\mathbf{X})$ ), come si verifica facilmente effettuando il prodotto:

$$\mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T = \mathbf{H}.$$

Il concetto di matrice idempotente, in assoluto non particolarmente rilevante, è uno strumento tecnico che sarà utilissimo per lo studio delle proprietà delle forme quadratiche in variabili normali, e per lo studio di particolari quantità che scaturiscono dall'analisi dei modelli lineari; proprio nei modelli lineari la matrice  $\mathbf{H}$  viene chiamata *hat matrix*, per motivi chiariti in quel capitolo.

### Esempi di matrici idempotenti di rango 2

Come è facile verificare mediante calcolo diretto, le seguenti matrici sono tutte idempotenti:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 9/17 & 8/17 & -2/17 & -2/17 \\ 8/17 & 9/17 & 2/17 & 2/17 \\ -2/17 & 2/17 & 8/17 & 8/17 \\ -2/17 & 2/17 & 8/17 & 8/17 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

### 1.1.6 Forme quadratiche

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata simmetrica  $p \times p$ , e  $\mathbf{t}$  è un vettore di  $p$  componenti, si definisce forma quadratica la funzione omogenea di secondo grado:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{t}^T \mathbf{A} \mathbf{t} = a_{11}t_1^2 + a_{22}t_2^2 + \dots + a_{ii}t_i^2 + \dots + a_{pp}t_p^2 + 2a_{12}t_1t_2 + \dots + 2a_{ij}t_it_j + \dots + 2a_{p-1,p}t_{p-1}t_p$$

#### Forme Quadratiche positive

se  $\mathbf{t}^T \mathbf{A} \mathbf{t} > 0, \forall \mathbf{t}, \mathbf{t} \neq 0 : \Rightarrow \mathbf{A}$  è definita positiva  
se  $\mathbf{t}^T \mathbf{A} \mathbf{t} \geq 0, \forall \mathbf{t}, \mathbf{t} \neq 0 : \Rightarrow \mathbf{A}$  è semidefinita positiva

In effetti si dice definita (o semidefinita) sia la matrice che la forma quadratica corrispondente.

#### Significato geometrico delle forme quadratiche

Una forma quadratica definita positiva definisce un'ellissoide in uno spazio  $p$ -dimensionale mediante l'equazione  $\mathbf{t}^T \mathbf{A} \mathbf{t} = k$ . Il volume di tale ellissoide è funzione del determinante della matrice  $\mathbf{A}$ . Questo aspetto sarà importante quando si parlerà di distribuzione normale multivariata.

inserire esempi e figure

## 1.2 Calcolo differenziale con vettori e matrici

### 1.2.1 Gradiente di una funzione

Data una funzione di  $k$  variabili  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , si definisce gradiente della funzione il vettore (colonna!) formato dalle derivate parziali di  $f(\cdot)$  rispetto a ciascuna variabile:

$$\frac{\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{(x_1, x_2, \dots, x_k)} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Hessiano di una funzione

Data una funzione di  $k$  variabili  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , si definisce Hessiano della funzione la matrice formata dalle derivate parziali seconde di  $f(\cdot)$  rispetto a ciascuna coppia di variabili:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k^2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Derivate di forme lineari e quadratiche

*Gradiente di combinazioni lineari di variabili:*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

( $\mathbf{x}, \mathbf{b}$  vettori di  $p$  componenti)

Infatti:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{b} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$$

per cui la singola derivata parziale è data da:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{b}}{\partial x_i} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

e quindi il risultato in forma vettoriale:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

In generale, per il gradiente di un vettore di combinazioni lineari si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{B}$$

ove:  $\mathbf{x}$  è un vettore di  $p$  componenti e

$\mathbf{B}$  è una matrice di  $p \times k$  elementi e di elemento generico  $b_{ij}$

*Gradiente ed Hessiano di una forma quadratica:*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = 2\mathbf{A}$$

$\mathbf{x}$  vettore (colonna!) di  $p$  componenti  $\mathbf{A}$  è una matrice simmetrica di  $p \times p$  elementi e di elemento generico  $a_{ij}$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \\ &= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{ii} x_i^2 + \dots + a_{pp} x_p^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \\ &\quad + \dots + 2a_{ij} x_i x_j + \dots + 2a_{p-1,p} x_{p-1} x_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial x_i} = \\ &= 2a_{ii}x_i + 2a_{i1}x_1 \dots + 2a_{ij}x_j + \dots + 2a_{ip}x_p \\ &= 2\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}\end{aligned}$$

essendo  $\mathbf{a}_i^\top$  l' $i$ -esima riga di  $\mathbf{A}$ .

Quindi segue il risultato in forma vettoriale, tenendo presente che derivando rispetto a tutti gli elementi di  $\mathbf{x}$ , le righe  $\mathbf{a}_i$  ricostituiscono la matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$$

Derivando ancora, si ottiene facilmente il risultato per le derivate seconde di una forma quadratica:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = 2\mathbf{A}$$

Jacobiano di una trasformazione lineare:

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice quadrata; data la trasformazione lineare:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b},$$

lo Jacobiano di tale trasformazione è dato da:

$$J(\mathbf{y}) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right| = |\mathbf{A}|$$

ossia il valore assoluto del determinante di  $\mathbf{A}$ .

#### 1.2.4 Derivate di inverse e di determinanti

Sia  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , di elemento generico:  $b_{ij} = \mathbf{A}_{ji}/|\mathbf{A}|$ , indicato con  $\mathbf{A}_{ij}$  il cofattore di  $a_{ij}$  in  $\mathbf{A}$  si può dimostrare che:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial a_{hk}} = -b_{ih}b_{kj} = \mathbf{A}_{hi}\mathbf{A}_{jk}/|\mathbf{A}|^2$$

Se  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$  (ossia  $\mathbf{A}$  è simmetrica)

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ii}} = \mathbf{A}_{ii}$$

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = 2\mathbf{A}_{ij} \quad i \neq j$$

(ricordando che  $|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^p a_{ij}\mathbf{A}_{ij}$ ).

## 1.3 Autovalori e autovettori

Gli autovalori e gli autovettori <sup>3</sup> sono delle quantità associate ad una matrice quadrata, che ne riassumono alcune caratteristiche essenziali.

In particolare per una matrice simmetrica si possono dimostrare proprietà molto forti.

Se poi la matrice simmetrica è una matrice di varianza e covarianza, si possono attribuire particolari significati a tali quantità, sia nel caso di matrici di varianza e covarianza di vettori di variabili aleatorie che nel caso di matrici di varianza e covarianza empiriche di vettori di variabili statistiche osservate, sebbene la loro interpretabilità, dal punto di vista dello statistico, non sia sempre agevole, se non in particolari contesti.

Nell'analisi esplorativa dei dati sono importanti per misurare la correlazione generale fra tutte le variabili, per determinare il grado di collinearità presente in un insieme di dati multivariati o in un vettore di variabili aleatorie e per trovare un sistema di riferimento ortogonale (per rotazione).

In questo corso saranno impiegati per scopi esplorativi e per lo studio della multicollinearità nella regressione multipla; per quanto riguarda i vettori aleatori, si vedrà presto l'interpretazione migliore degli autovettori e degli autovalori per vettori aleatori distribuiti secondo una normale multivariata.

Nelle pagine che seguono vengono brevemente richiamate le proprietà algebriche e geometriche degli autovalori e degli autovettori, con riferimento in particolare alle caratteristiche che verranno successivamente sfruttate nel corso. Resta sottinteso che si tratta semplicemente di un richiamo di nozioni che in modo più completo e sistematico vanno approfondite, se non lo si è già fatto, in un corso di algebra lineare.

### 1.3.1 Definizione di autovettore e autovalore

Data la matrice quadrata  $\mathbf{A}$ , si vuole trovare la soluzione non banale<sup>4</sup>  $\gamma$  del sistema di equazioni:

**Autovettore di una matrice quadrata  $\mathbf{A}$**

$$\mathbf{A}\gamma = \lambda\gamma$$

Si vuole quindi trovare un vettore  $\gamma$  la cui proiezione secondo lo spazio definito da  $\mathbf{A}$  sia parallela al vettore stesso.

Si tratta di un sistema omogeneo nell'incognita  $\gamma$ , infatti:

$$\mathbf{A}\gamma - \lambda\gamma = \mathbf{0}_p$$

<sup>3</sup>Termini italiani: autovalore, radice caratteristica; Termini inglesi: characteristic roots, eigenvalue  
Termini italiani: autovettore, vettore caratteristico  
Termini inglesi: eigenvector

<sup>4</sup>Una soluzione non banale è una soluzione con elementi non tutti nulli

e quindi:

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}_p$$

Condizione necessaria per avere una soluzione  $\boldsymbol{\gamma}$  diversa dal vettore nullo è che:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p| = 0.$$

La precedente è un'equazione di grado  $p$  in  $\lambda$ , per cui vi saranno  $p$  autovalori complessi (distinti e non):

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_p.$$

L'equazione è di grado  $p$  in quanto sviluppando il determinante di  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p$ , il primo termine è:  $\prod_{i=1}^p (a_{ii} - \lambda)$  che risulta essere di grado  $p$  in  $\lambda$

Di solito si conviene di normalizzare gli autovettori in modo tale che:

$$\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} = 1.$$

Infatti in corrispondenza di ciascun autovalore  $\lambda_i$  vi sarà certamente un'infinità di autovettori proporzionali  $\boldsymbol{\gamma}_i$  (Si vede subito dalla definizione di autovettore: se  $\boldsymbol{\gamma}_i$  è un autovettore lo è anche  $k\boldsymbol{\gamma}_i$ ).

In ogni caso resta l'ambiguità sul segno di  $\boldsymbol{\gamma}$ .

### 1.3.2 Proprietà generali degli autovalori

Dall'equazione fondamentale:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p| = 0,$$

si vede che il polinomio di grado  $p$  in  $\lambda$ :

$$q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p|$$

si può esprimere in funzione delle  $p$  radici complesse  $\lambda_i$ :

$$q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p| = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda)$$

(si può dimostrare dalle proprietà relative alla fattorizzazione dei polinomi).

Per cui si ha subito (sfruttando le proprietà dei polinomi):

#### Traccia e determinante in funzione degli autovalori

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$$

Il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori.

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

La traccia di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori.

### 1.3.3 Autovalori e autovettori di matrici simmetriche

Per gli autovalori e gli autovettori di una matrice simmetrica  $\mathbf{A}$  si possono dimostrare proprietà molto forti, corrispondenti a molte caratteristiche essenziali della matrice (in generale molte proprietà valgono anche per matrici hermitiane, ossia con elementi  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$  complessi coniugati, tuttavia per gli argomenti da noi trattati è sufficiente riferirci a matrici simmetriche reali)

Se  $\mathbf{A}$  è simmetrica tutti gli autovalori e gli autovettori sono reali, per cui convenzionalmente gli autovalori  $\lambda_i$  vengono indicizzati in ordine decrescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \geq \lambda_p.$$

Se  $\mathbf{A}$  è simmetrica, il numero degli autovalori non nulli è uguale a  $\rho(\mathbf{A})$  (rango di  $\mathbf{A}$ ). Se per  $i \neq j$  i corrispondenti autovalori  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  sono distinti si ha:

$$\begin{cases} \gamma_i^T \gamma_j = 0 & (\text{ortogonalità}) \\ \gamma_i^T \mathbf{A} \gamma_j = 0 \end{cases}$$

Infatti  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$ , insieme ai corrispondenti autovettori, forniscono due soluzioni distinte del sistema di equazioni:  $\mathbf{A} \gamma = \lambda \gamma$ , e quindi valgono contemporaneamente i due gruppi di eguaglianze:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \gamma_i = \lambda_i \gamma_i \\ \mathbf{A} \gamma_j = \lambda_j \gamma_j \end{cases}$$

Premoltiplicando ambo i membri del primo sistema per  $\gamma_j^T$  e i due membri del secondo per  $\gamma_i^T$  otteniamo due eguaglianze fra scalari:

$$\begin{cases} \gamma_j^T \mathbf{A} \gamma_i = \gamma_j^T \lambda_i \gamma_i \\ \gamma_i^T \mathbf{A} \gamma_j = \gamma_i^T \lambda_j \gamma_j \end{cases}$$

in cui i primi membri sono uguali, perchè  $\gamma_j^T \mathbf{A} \gamma_i$  è la trasposta di  $\gamma_i^T \mathbf{A} \gamma_j$ , ed essendo scalari sono uguali, per cui uguagliando i secondi membri si ha:

$$\gamma_j^T \lambda_i \gamma_i = \gamma_i^T \lambda_j \gamma_j$$

e quindi:

$$\gamma_i^T \gamma_j (\lambda_i - \lambda_j) = 0$$

e infine, avendo supposto distinti i due autovalori,  $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ , per cui deve essere:

$$\gamma_i^T \gamma_j = 0.$$

Saranno quindi nulli anche i primi membri, per cui:

$$\gamma_i^T \mathbf{A} \gamma_j = 0.$$

In ogni caso si può dimostrare per ogni autovalore di molteplicità  $m$ ,  $m$  autovettori corrispondenti possono essere rimpiazzati da  $m$  loro combinazioni lineari indipendenti. Gli autovettori possono essere scelti in modo da soddisfare i vincoli di ortogonalità per ogni coppia  $i \neq j$

$$\gamma_i^T \gamma_j = 0 \quad \text{ed anche} \quad \gamma_i^T \mathbf{A} \gamma_j = 0$$

Pertanto se  $\Gamma$  è la matrice che ha come colonne gli autovettori  $\mathbf{y}_i$ , allora per l'ortogonalità fra gli autovettori si ha:

$$\Gamma^T \Gamma = \mathbf{I};$$

ed anche:

$$\Gamma^{-1} = \Gamma^T,$$

e quindi:

$$\Gamma \Gamma^T = \mathbf{I}.$$

(queste ultime proprietà valgono comunque per matrici ortogonali)

### Diagonalizzazione di una matrice simmetrica

Dalla definizione di autovettore si ha anche l'importante proprietà:  
(avendo posto  $\Lambda = \text{Diag}(\boldsymbol{\lambda})$ ).

$$\Gamma^T \mathbf{A} \Gamma = \text{Diag}(\boldsymbol{\lambda}) = \Lambda \quad (1.5)$$

Dalla definizione si ha infatti:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_i = \lambda_i \boldsymbol{\gamma}_i$$

Premoltiplicando ambo i membri per  $\boldsymbol{\gamma}_j^T$  si ha:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_i = \lambda_i & \text{se } i = j \\ \boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_i = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

La diagonalizzazione di una matrice simmetrica sarà importante quando  $\mathbf{A}$  è una matrice di varianza e covarianza.

Dal risultato fondamentale sulla diagonalizzazione di una matrice simmetrica si può ricavare un altro risultato molto utile:

**D**

ata una matrice simmetrica definita positiva  $\mathbf{A}$  di rango pieno è possibile sempre trovare una matrice  $\mathbf{B}$  tale che:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

E' facile vedere che le colonne della matrice  $\mathbf{B}$  si ottengono riscaldando gli autovettori di  $\mathbf{A}$ , ossia con:  $\boldsymbol{\gamma}_i / \sqrt{\lambda_i}$  (dal momento che la matrice è di rango pieno i suoi autovalori sono tutti positivi)

## Decomposizione spettrale di una matrice simmetrica

Dalla relazione 1.5  $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}$ , si ha anche, premoltiplicando ambo i membri per  $\mathbf{\Gamma}$  e postmoltiplicando per  $\mathbf{\Gamma}^T$ :

### Decomposizione canonica (o spettrale) di $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^T = \lambda_1 \gamma_1 \gamma_1^T + \lambda_2 \gamma_2 \gamma_2^T + \dots + \lambda_p \gamma_p \gamma_p^T$$

relazione fondamentale per la ricostruzione di una matrice simmetrica a partire dagli autovettori. I primi  $k$  termini ( $k < p$ ) forniscono un'approssimazione della matrice  $\mathbf{A}$  di rango  $k$ .

## Autovalori di inverse e di potenze

Vediamo che relazioni esistono fra gli autovalori e gli autovettori di una matrice e quelli della sua inversa e delle sue potenze.

Operiamo ancora sull'equazione che definisce gli autovalori e gli autovettori:

$$\mathbf{A} \gamma_i = \lambda_i \gamma_i$$

Se il rango di  $\mathbf{A}$  è pieno, premoltiplicando ambo i membri per  $\lambda_i^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ , si ottiene

$$\lambda_i^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \gamma_i = \lambda_i^{-1} \mathbf{A}^{-1} \lambda_i \gamma_i \Rightarrow \lambda_i^{-1} \gamma_i = \mathbf{A}^{-1} \gamma_i$$

e si vede facilmente che:

$$\lambda_i(\mathbf{A}^{-1}) = [\lambda_i(\mathbf{A})]^{-1}$$

(a meno di un riordinamento degli indici)

Qualunque sia il rango di  $\mathbf{A}$ , premoltiplicando ripetutamente ambo i membri per  $\mathbf{A}$ , si dimostra per induzione che:

$$\lambda_i(\mathbf{A}^k) = [\lambda_i(\mathbf{A})]^k$$

In entrambi i casi gli autovettori sono sempre quelli di  $\mathbf{A}$ .

Matrice	$\lambda$	$\gamma$	Decomposizione canonica
$\mathbf{A}$	$\lambda_i$	$\gamma_i$	$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^T = \sum_{i=1}^p \lambda_i \gamma_i \gamma_i^T$
$\mathbf{A}^{-1} ( \mathbf{A}  \neq 0)$	$\lambda_i^{-1}$	$\gamma_i$	$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Gamma}^T = \sum_{i=1}^p \gamma_i \gamma_i^T / \lambda_i$
$\mathbf{A}^k$ $k$ intero	$\lambda_i^k$	$\gamma_i$	$\mathbf{A}^k = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{\Gamma}^T = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \gamma_i \gamma_i^T$

## Autovalori di una forma quadratica definita positiva

### Autovalori di una forma quadratica definita positiva

Una matrice simmetrica  $\mathbf{A}$  è definita positiva, *se e solo se* tutti i suoi autovalori sono positivi.

$\mathbf{A}$  è semidefinita positiva, *se e solo se* tutti i suoi autovalori sono non negativi.

Infatti ricorrendo agli autovalori ed agli autovettori di  $\mathbf{A}$  si può scrivere  $\mathbf{A}$  secondo la decomposizione canonica  $\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Gamma}^T$ :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}$$

Ponendo ora  $\mathbf{y} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}$ , si ha:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2$$

da cui deriva il risultato sulla positività di  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ .

Si vede anche che una forma quadratica si può sempre esprimere come somma ponderata di quadrati di variabili ruotate secondo gli autovettori di  $\mathbf{A}$ .

Infatti si è può sempre trasformare un ellissoide qualsiasi, mediante opportune trasformazioni lineari ortogonali, in un ellissoide ad assi paralleli a quelli coordinati, e quindi, mediante cambiamenti di scala, in un' ipersfera.

**un esempio**

Questi concetti saranno impegnati nella sezione sull'analisi delle componenti principali (2.2 )

# Capitolo 2

## Richiami di alcune proprietà dei vettori aleatori.

### Contents

<b>2.1</b>	<b>Momenti primo e secondo multivariati di vettori aleatori</b>	<b>25</b>
2.1.1	Momenti di una trasformata lineare di un vettore aleatorio	27
<b>2.2</b>	<b>Analisi delle componenti principali (ACP), solo cenni</b>	<b>36</b>
2.2.1	Significato statistico e probabilistico delle componenti principali	39

### 2.1 Momenti primo e secondo multivariati di vettori aleatori

Sia  $\mathbf{X}$  un qualsiasi vettore di variabili casuali, sia discrete che continue, con  $p$  componenti:

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_p\}^T$$

Definiamo i primi due momenti di un vettore aleatorio, con una notazione analoga a quella del caso univariato:

momenti  
di un  
vettore  
aleatorio

#### Momento primo e secondo multivariati

*vettore di speranze matematiche:*

$$E[\mathbf{X}] = \mu \quad \text{momento primo (multivariato) dall'origine}$$

*matrice di varianze e covarianze:*

$$V[\mathbf{X}] = E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T] \quad \text{momento secondo (multivariato) centrale}$$

*Ovviamente nella definizione si presuppone l'esistenza dei momenti primi e secondi delle varie componenti e coppie di componenti.*

- $\boldsymbol{\mu}$  è un vettore di  $p$  elementi, con elemento generico:

$$E[X_i] = \mu_i$$

- $V[\mathbf{X}]$  è una matrice simmetrica  $p \times p$  di elemento generico:

$$\sigma_{ij} = \{V[\mathbf{X}]\}_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = E[X_i X_j] - \mu_i \mu_j$$

e quindi in definitiva si ha:

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1i} & \dots & \sigma_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1i} & \dots & \sigma_i^2 & \dots & \sigma_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{1p} & \dots & \sigma_{ip} & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

Per gli elementi sulla diagonale principale di  $V[\mathbf{X}]$ , ossia per le varianze delle singole componenti, invece della notazione  $\sigma_{ii}$  si impiega la notazione  $\sigma_i^2$  per uniformità col simbolismo nel caso univariato.

### Momenti centrati e momenti secondi dall'origine

Vale la nota relazione in termini di momenti multivariati dall'origine:

$$V[\mathbf{X}] = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T$$

Si può definire la *matrice di correlazione*,  $R(\mathbf{X})$ , di elemento generico:

$$\rho_{ij} = \{R(\mathbf{X})\}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

che, ovviamente, è simmetrica ed ha elementi diagonali tutti uguali ad uno:

$$R(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \rho_{1i} & \dots & \rho_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{1i} & \dots & 1 & \dots & \rho_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{1p} & \dots & \rho_{ip} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dati gli argomenti che qui trattiamo, evidentemente abbiamo supposto di avere un numero  $p$  fissato di variabili, e non una sequenza di variabili aleatorie anche infinita, come avviene per esempio nella definizione di processi aleatori.

E'ovviamente possibile definire momenti multivariati di  $\mathbf{X}$  centrali e non centrali di ordine superiore rispetto al secondo, ma per gli argomenti ora trattati non è necessario.

Come per le variabili aleatorie semplici i momenti di ordine 3 e 4 forniscono degli indici di forma, i momenti multivariati di ordine superiore al secondo forniscono degli indici di forma multivariati, degli indicatori di allontanamento dalla multinormalità, indici di non linearità delle regressioni e di eteroscedasticità.

[link con sezione uso dei momenti bivariati nell'analisi dei residui](#)

In effetti la matrice di varianze e covarianze fornisce informazioni solo sulla variabilità delle singole componenti e sulle loro correlazioni lineari, sia per le distribuzioni congiunte che per quelle condizionate (elementi della matrice inversa). Per le combinazioni lineari di variabili si useranno gli autovalori e gli autovettori della matrice di varianze e covarianze.

link o riferimento  
(vedere anche → schema delle relazioni lineari)

Come chiarito nella parte sulla normale multivariata, in analogia al caso univariato, la normale multivariata dipende solo dai primi due momenti multivariati, per cui la conoscenza della matrice di varianza e covarianza è in quel caso sufficiente per valutare qualsiasi relazione di tipo lineare fra componenti

[link con normale multivariata](#)

### 2.1.1 Momenti di una trasformata lineare di un vettore aleatorio

Sia ora  $\mathbf{Y}$  una v.c. a  $k$  componenti, ottenuta mediante una qualsiasi trasformazione lineare di  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{[k \times p]} \mathbf{X} + c_{[k \times 1]}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  ha  $k$  righe e  $p$  colonne e per il resto è qualsiasi, nel senso che il suo rango può anche essere inferiore a  $\min(k, p)$ . Il vettore  $c$  ha  $k$  elementi. Con semplici passaggi si vede come data la matrice  $\mathbf{A}$  e il vettore  $c$  è possibile ottenere tutti i momenti di  $\mathbf{Y}$  in funzione di quelli di  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= E[\mathbf{A}\mathbf{X} + c] = \mathbf{A}E[\mathbf{X}] + c = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + c \\ V[\mathbf{Y}] &= V[\mathbf{A}\mathbf{X} + c] = E[(\mathbf{A}\mathbf{X} + c - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - c)(\mathbf{A}\mathbf{X} + c - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - c)^T] = \\ &= E[\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}^T] = \mathbf{A}V[\mathbf{X}] \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

## Momenti di una trasformazione lineare di un vettore aleatorio

$$\begin{aligned} E[\mathbf{AX} + c] &= \mathbf{A}E[\mathbf{X}] + c && \text{Speranza matematica} \\ \text{Se } \mathbf{X}: \mathbf{Y} = \mathbf{AX} + c \quad V[\mathbf{AX} + c] &= \mathbf{A}V[\mathbf{X}]\mathbf{A}^T && \text{Matrice di varianze e covarianze} \end{aligned}$$

In particolare se  $k = 1$  allora  $\mathbf{A}$  è un vettore riga  $\mathbf{b}^T$ ,  $c$  è uno scalare e  $\mathbf{Y}$  è una v.c. semplice  $y$  (ossia scalare) e si ha:

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{X} + c$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E[y] &= \mathbf{b}^T E[\mathbf{X}] + c = \\ &= b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 + \dots + b_p \mu_p + c \\ V[y] &= \mathbf{b}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{b} = \\ &= b_1^2 \sigma_1^2 + b_2^2 \sigma_2^2 + \dots + b_i^2 \sigma_i^2 + \dots \\ &+ \dots + b_p^2 \sigma_p^2 + 2b_1 b_2 \sigma_{12} + \dots + 2b_i b_j \sigma_{ij} + \dots + 2b_{p-1} b_p \sigma_{p-1,p} \end{aligned}$$

Formule più complesse valgono per i momenti multivariati di ordine superiore al secondo, ma è sempre possibile ricavare tutti i momenti (multivariati) di grado  $m$  di  $\mathbf{Y}$ , sia centrali che non centrali, a partire dalla conoscenza della matrice di trasformazione  $\mathbf{A}$  e dei momenti multivariati di grado  $1, 2, \dots, m$  di  $\mathbf{X}$ .

**Esempio 2.1.1** *Si hanno  $n$  variabili casuali  $X_i$  normali indipendenti con  $E[X_i] = \mu_i$  e  $V[X_i] = \sigma_i^2$ ,*

*Quali sono i primi due momenti della nuova variabile aleatoria  $Z$  definita dalla relazione:*

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

*E' facile vedere che per ogni  $X_i$  si ha:*

$$\begin{aligned} E[X_i^2] &= \mu_i^2 + \sigma_i^2, \\ V[X_i^2] &= E[X_i^4] - (E[X_i^2])^2 = \\ &= \mu_i^4 + 6\sigma_i^2 \mu_i^2 + 3\sigma_i^4 - (\mu_i^2 + \sigma_i^2)^2 \\ &= 2(\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2 \mu_i^2) \end{aligned}$$

ricordando le proprietà dei momenti della normale.

Infine si ha il risultato richiesto:

$$E[Z] = \sum_{i=1}^n (\mu_i^2 + \sigma_i^2);$$

$$V[Z] = 2 \sum_{i=1}^n (\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2 \mu_i^2).$$

### Costruzione di variabili correlate

Un metodo semplice per la costruzione di  $p$  variabili aleatorie  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  correlate a partire da  $p + 1$  variabili aleatorie indipendenti  $X_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ), è quello di sommare la componente  $X_0$  a tutte le altre  $p$  componenti  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ . In dettaglio otteniamo ora un nuovo vettore aleatorio  $\mathbf{Y}$  a  $p$  componenti correlate, ponendo:

$$\begin{pmatrix} Y_1 = X_0 + X_1 \\ \vdots \\ Y_j = X_0 + X_j \\ \vdots \\ Y_p = X_0 + X_p \end{pmatrix} \quad X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad (i, j = 0, 1, \dots, p; i \neq j)$$

In pratica la componente  $X_0$  è quella che determina la covarianza fra le componenti di  $\mathbf{Y}$ .

E' facile calcolare i momenti di  $\mathbf{Y}$  da quelli di  $\mathbf{X}$ , mentre può essere in generale arduo calcolare la distribuzione di  $\mathbf{Y}$  (anche considerando  $\mathbf{X}$  dotato di densità, spesso è complicato integrare rispetto a  $\mathbf{X}_0$  nella densità congiunta di  $X_0, X_1, \dots, X_p$ ).

**Esempio 2.1.2** Come esercizio si calcoli la correlazione e la covarianza fra due generiche componenti di  $\mathbf{Y}$  o, direttamente, la matrice di varianze e covarianze e la matrice di correlazione di  $\mathbf{Y}$ .

$$\begin{aligned} V[Y_j] &= V[X_0] + V[X_j] \\ Cov(Y_j, Y_k) &= Cov(X_0 + X_j, X_0 + X_k) \\ &= V[X_0] \quad \text{data l'indipendenza delle } X \\ corr(Y_j, Y_k) &= \frac{V[X_0]}{\sqrt{(V[X_0] + V[X_j])(V[X_0] + V[X_k])}} \end{aligned}$$

e quindi per la correlazione fra due generiche componenti si ha (dividendo numeratore e denominatore per  $V[X_0]$ ):

$$corr(Y_j, Y_k) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{V[X_j]}{V[X_0]})(1 + \frac{V[X_k]}{V[X_0]})}}$$

La correlazione fra le componenti di  $\mathbf{Y}$  è quindi una funzione crescente di  $V[X_0]$ .

## Funzione caratteristica di una trasformata lineare di un vettore aleatorio

Se  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + c$

Allora la funzione caratteristica di  $\mathbf{Y}$  si ricava da quella di  $\mathbf{X}$  mediante la relazione:

$$\phi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \exp[i\mathbf{t}^T c] \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}\mathbf{t})$$

### Matrici di varianze e covarianze

Una matrice di varianze e covarianze è sempre semidefinita positiva, sia per variabili aleatorie multiple che per variabili statistiche multiple.

Infatti, dato un vettore aleatorio  $\mathbf{X}$ , la varianza di una sua qualsiasi combinazione lineare  $\mathbf{Y} = \mathbf{t}^T \mathbf{X}$  (con  $\mathbf{t} \neq 0$ ) come è noto è data da:

$$V[\mathbf{Y}] = V[\mathbf{t}^T \mathbf{X}] = \mathbf{t}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{t};$$

essendo  $V[\mathbf{Y}] \geq 0$ , in quanto una varianza è sempre non negativa, allora:

$$\mathbf{t}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{t} \geq 0, \forall \mathbf{t}, \mathbf{t} \neq 0$$

e quindi, secondo la definizione data prima,  $V[\mathbf{X}]$  è una matrice semidefinita positiva; è definita positiva se si esclude il caso di collinearità esatta fra le  $p$  variabili, e quindi se  $V[\mathbf{X}]$  è di rango pieno  $p$  (e quindi  $V[\mathbf{Y}] > 0$ ).

Si può anche dimostrare, ma ometto la dimostrazione, che  $\mathbf{A}$  è semidefinita positiva, se e solo se si può scrivere come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$$

(con  $\mathbf{X}$  qualsiasi, anche rettangolare).

Per esempio se  $\mathbf{X}$  è una matrice di dati ( $n$  osservazioni e  $p$  variabili), e  $\mathbf{Z}$  la matrice degli scarti dalle rispettive medie aritmetiche, allora  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$  è la matrice delle devianze e codevianze delle  $p$  variabili che, come si sa, è semidefinita positiva.

Analogamente vengono definite le forme quadratiche definite negative e semidefinite negative.

### Momento primo di forme quadratiche

Se  $\mathbf{X}$  è un vettore aleatorio dotato dei primi due momenti, per una forma quadratica in  $\mathbf{X}$ , con  $E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$  si ha:

$$E[\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}] = \text{tr}(\mathbf{A} V[\mathbf{X}]) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$$

adv.

## Momenti di funzioni qualsiasi di vettori aleatori.

In queste righe parlo principalmente di combinazioni lineari di variabili aleatorie, e qualche volta di forme quadratiche; qualche volta però occorre trattare variabili che sono funzioni non lineari di altre variabili e di volerne calcolare, se non la distribuzione esatta, almeno i momenti in forma approssimata.

E' intuitivo che la strada maestra per la soluzione di un simile problema è quello dell'approssimazione attraverso sviluppi in serie, che darà risultati migliori, quanto più la funzioni da trattare siano linearizzabili: è possibile trovare delle approssimazioni per i momenti di funzioni qualsiasi di vettori aleatori con momenti noti, attraverso opportuni sviluppi in serie, possibilmente troncati ai primi termini per evitare formule troppo complesse.

Sia  $\mathbf{g}(\cdot)$  un vettore di  $k$  funzioni reali di  $p$  variabili reali, e si abbia quindi la generica trasformazione di vettori aleatori:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}),$$

in cui  $\mathbf{X}$  è un vettore aleatorio a  $p$  componenti e  $\mathbf{Y}$  è un vettore aleatorio a  $k$  componenti.

Indichiamo con  $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  la matrice  $k \times p$  delle derivate parziali delle componenti di  $\mathbf{g}(\cdot)$  rispetto agli elementi di  $\mathbf{x}$ .<sup>1</sup>

Sviluppando  $\mathbf{g}(\cdot)$  in serie di Taylor troncata al primo termine attorno al vettore speranza matematica di  $\mathbf{X}$ , ossia  $E[\mathbf{X}]$ , si hanno le espressioni più semplici:

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{g}(E[\mathbf{X}]) + \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \quad (2.1)$$

$\left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$  è calcolato nel punto  $\mathbf{x} = E[\mathbf{X}]$ .

Prendendo la speranza matematica di ambo i membri si ha:

$$E[\mathbf{Y}] \approx E[\mathbf{g}(E[\mathbf{X}])] + E \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} [\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]] \right] = \mathbf{g}(E[\mathbf{X}])$$

(il secondo addendo del secondo membro si annulla perchè  $E[\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]] = \mathbf{0}$  e  $\left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]}$  è una costante e non una variabile aleatoria.)

Sostituendo nell'espressione precedente (2.1):

$$\mathbf{Y} \approx E[\mathbf{Y}] + \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} [\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]]$$

per cui:

$$\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}] \approx \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} [\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]]$$

che è una relazione lineare approssimata fra gli scarti dei vettori aleatori. Applicando i teoremi sulle trasformazioni lineari di vettori aleatori (visti in 2.1.1) si ha:

$$V[\mathbf{Y}] \approx \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} V[\mathbf{X}] \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]}^T$$

<sup>1</sup>ho ovviamente dato per assunta l'esistenza delle derivate opportune

(In tutte le formule precedenti  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$  è calcolata nel punto  $\mathbf{x} = E[\mathbf{X}]$ )  
 Nel caso univariato ( $p = k = 1$ )  $\mathbf{g}$  è una funzione di una sola variabile  $g(\cdot)$ :

$$V[\mathbf{y}] \approx [g(x)]^2 V[\mathbf{X}]$$

#### Approssimazioni ai momenti di trasformate qualsiasi di v.a.

$$E[\mathbf{g}(\mathbf{X})] \approx \mathbf{g}(E[\mathbf{X}]) \quad (2.2)$$

$$V[\mathbf{Y}] \approx \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]} V[\mathbf{X}] \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=E[\mathbf{X}]}^T \quad (2.3)$$

#### Esempio sulla distribuzione F

A chiarimento di queste formule, e solo per dare un'idea del grado di approssimazione in alcuni casi di cui si conosce la soluzione esatta, riporto alcuni esempi, comunque non essenziali per gli argomenti immediatamente successivi. Come esempio si consideri la variabile casuale F di Snedecor, data dal rapporto di due variabili casuali  $\chi^2$  indipendenti, divise per i rispettivi gradi di libertà. Per valutare l'approssimazione fornita dalle formule del paragrafo precedente, applichiamo per ottenere delle espressioni approssimate dei primi due momenti di F, le cui espressioni esatte sono comunque note.

La funzione di trasformazione è:

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2},$$

essendo  $X_1$  e  $X_2$  due variabili casuali  $\chi^2$  indipendenti, rispettivamente con  $\nu_1$  e  $\nu_2$  gradi di libertà; quindi si ha in questo esempio  $k = 1$  e  $p = 2$ . Definendo quindi il vettore aleatorio  $\mathbf{X} = [X_1, X_2^T]$ , si ha per i primi due momenti, come è noto dalle proprietà della variabile  $\chi^2$ :

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} 2\nu_1 & 0 \\ 0 & 2\nu_2 \end{pmatrix}$$

L'approssimazione (del primo ordine) al momento primo di F è data da:

$$E[F] \approx F_{x=E[\mathbf{X}]} = \left( \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \right)_{x=E[\mathbf{X}]} = \frac{\nu_1/\nu_1}{\nu_2/\nu_2} = 1$$

Ricordando le proprietà della variabile F di Snedecor, sappiamo che il momento primo esatto è dato da:

$$E[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$$

l'approssimazione coincide col valore esatto solo al divergere di  $\nu_2$  ; infatti:

$$\lim_{\nu_2 \rightarrow \infty} E[F] = \lim_{\nu_2 \rightarrow \infty} \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} = 1.$$

Passando ora al calcolo dell'approssimazione alla varianza di F occorre valutare il gradiente di F (rispetto a  $\mathbf{X}$  ) nel punto  $E[\mathbf{X}]$ :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=E[\mathbf{X}]} = \left( \frac{\nu_2}{\nu_1 X_2}, \frac{-\nu_2 X_1}{\nu_1 X_2^2} \right)_{\mathbf{X}=\{\nu_1, \nu_2\}^\top}^\top = \left( \frac{1}{\nu_1}, \frac{-1}{\nu_2} \right)^\top$$

ed infine sostituire nella formula:

$$\begin{aligned} V[F] &\approx \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=E[\mathbf{X}]}^\top V[\mathbf{X}] \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=E[\mathbf{X}]} = \\ &= \left( \frac{1}{\nu_1}, \frac{-1}{\nu_2} \right)^\top \begin{pmatrix} 2\nu_1 & 0 \\ 0 & 2\nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{2}{\nu_1} + \frac{2}{\nu_2}. \end{aligned}$$

Sappiamo che la varianza esatta della F di Snedecor è data da:

$$V[F] = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2}$$

E' facile vedere che il rapporto fra l'approssimazione ed il valore esatto della varianza di F tende a 1 al divergere di  $\nu_1$  e  $\nu_2$  ; infatti è facile vedere che:

$$\lim_{\nu_1, \nu_2 \rightarrow \infty} \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2} = 1.$$

### Esempio sulla distribuzione Beta

Come altro esempio consideriamo la variabile casuale Beta, funzione di due variabili gamma indipendenti secondo la funzione di trasformazione:

$$B(X_1, X_2) = \frac{X_1}{X_1 + X_2},$$

essendo  $X_1$  e  $X_2$  due variabili casuali gamma indipendenti, con parametri di scala unitari e parametri di forma rispettivamente  $\alpha$  e  $\beta$  ; quindi si ha anche in questo esempio  $k = 1$  e  $p = 2$ . Definendo quindi il vettore aleatorio  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2\}^\top$ , si ha per i primi due momenti, come è noto dalle proprietà della variabile gamma:

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

L'approssimazione (del primo ordine) al momento primo di  $B(X_1, X_2)$  è data da:

$$E[B(X_1, X_2)] \approx B(X_1, X_2)_{\mathbf{X}=E[\mathbf{X}]} = \left( \frac{X_1}{X_1 + X_2} \right)_{\mathbf{X}=(\alpha, \beta)^\top} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Ricordando le proprietà della variabile B, vediamo che questa approssimazione coincide con il valore esatto:

$$E[B(X_1, X_2)] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Per quanto riguarda la varianza, il gradiente di B calcolato in corrispondenza del valore atteso è dato da:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=E[\mathbf{X}]} = \left(\frac{X_2}{(X_1 + X_2)^2}, \frac{-X_1}{(X_1 + X_2)^2}\right)_{\mathbf{X}=\{\alpha, \beta\}^\top}^\top = \left(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2}, \frac{-\alpha}{(\alpha + \beta)^2}\right)^\top$$

e infine sostituendo nella formula:

$$\begin{aligned} V[B] &= \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{x=E[\mathbf{X}]}^\top V[\mathbf{X}] \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{x=E[\mathbf{X}]} = \\ &= \left(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2}, \frac{-\alpha}{(\alpha + \beta)^2}\right)^\top \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2}, \frac{-\alpha}{(\alpha + \beta)^2}\right) = \\ &\quad \text{(dopo alcune semplificazioni elementari)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^3}. \end{aligned}$$

Ricordando adesso che la varianza esatta della variabile Beta è data da:

$$V[B] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Stavolta il rapporto fra l'approssimazione ed il valore esatto della varianza di B è dato da:

$$\frac{V_{\text{appr}}(B)}{V[B]} = \frac{(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta)}$$

si vede facilmente che questa quantità tende a 1 al divergere di  $\alpha$  oppure di  $\beta$  (mentre per il rapporto F occorre la divergenza di entrambi i parametri).

### Esempio su variabili osservate

[esempio da fare con file esempioBMP1 Rmd](#)

Un altro esempio è tratto da variabili statistiche osservate: su un insieme di 1432 bambini sono state rilevate le variabili altezza e peso. Il vettore delle medie e la matrice di varianze e covarianze empiriche sono riportate di seguito:

Variabile	Media	Varianza
ALTEZZA (Metri)	1,5192	0,0103
PESO (Kilogrammi)	44,9909	115,6358

La matrice di varianza e covarianza delle variabili peso e altezza è data da:

$$V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} 115,6358 & 0,7851 \\ 0,7851 & 0,0103 \end{pmatrix}$$

Su questi 1432 soggetti viene calcolata la nuova variabile BMI (Body Mass Index), data da:

$$BMI = \frac{Peso^2}{Altezza}$$

Questa variabile è impiegata in campo biomedico come indicatore per valutare il grado di adiposità di un soggetto.<sup>2</sup>

Se vogliamo una valutazione approssimata della media di BMI, senza calcolare materialmente i valori sui 1432 soggetti (magari perchè non disponiamo delle singole osservazioni), ma basandoci sui momenti delle variabili altezza e peso otteniamo:

$$M(BMI) \approx \frac{M(Peso)}{(M(Altezza))^2} = \frac{44,9909}{1,5192^2} = 19,4937$$

Per quanto riguarda la varianza si ha (indicando con  $X_1$  la variabile Peso e con  $X_2$  la variabile Altezza) per il gradiente di BMI:

$$BMI = \frac{X_1}{X_2^2}$$

$$\left(\frac{\partial BMI}{\partial x}\right)_{x=E[\mathbf{X}]} = \left(\frac{1}{X_2^2}, \frac{-2X_1}{X_2^3}\right)_{x=E[\mathbf{X}]}^T = \left(\frac{1}{1,5192^2}, \frac{-2 \times 44,9909}{1,5192^3}\right)^T \quad (2.4)$$

$$= (0,4333; -25,6631)^T \quad (2.5)$$

Quindi, sostituendo nella relazione:

$$V[BMI] \approx \left(\frac{\partial BMI}{\partial x}\right)_{x=E[\mathbf{X}]}^T V[\mathbf{X}] \left(\frac{\partial BMI}{\partial x}\right)_{x=E[\mathbf{X}]} =$$

si ottiene il valore approssimato della varianza di BMI:

$$V[BMI] \approx \{0,4333; -25,6631\} \begin{pmatrix} 115,6358 & 0,7851 \\ 0,7851 & 0,0103 \end{pmatrix} \{0,4333; -25,6631\}^T \\ = 11,0337$$

Il grado di validità di queste approssimazioni può essere verificato confrontando con i valori esatti dei primi due momenti di BMI calcolati sui 1432 valori trasformati a partire dai valori singoli originari:

BMI= (Kg/ mt <sup>2</sup> )		
Media	Varianza	
19,3103	10,4356	Valori esatti
19,4937	11,0337	Valori approssimati

<sup>2</sup>un adulto non dovrebbe superare un valore di 25

Ovviamente l'utilità di tali formule approssimate si ha quando non è possibile calcolare i momenti esatti (nel caso di variabili aleatorie) o se non sono disponibili i dati relativi alle singole osservazioni, per il calcolo dei valori trasformati, ma solo i primi due momenti delle variabili originarie.

## 2.2 Analisi delle componenti principali (ACP), solo cenni

Questa parte ha molto in comune da un punto di vista tecnico con l'analisi delle componenti principali per variabili statistiche multiple osservate. In effetti, l'analisi in componenti principali per vettori aleatori assume un significato molto forte se il vettore aleatorio segue una distribuzione normale multivariata. Maggiori dettagli nella parte sulla normale multivariata e nelle parti sulle variabili statistiche osservate.

4

Sia  $\mathbf{X}$  un vettore aleatorio di  $p$  componenti dotato di momenti multivariati di primo e secondo ordine:

$$\begin{cases} E[\mathbf{X}] = \mathbf{0} & (\text{valore atteso nullo}) \\ V[\mathbf{X}] = \Sigma \end{cases} ;$$

Se le variabili sono standardizzate, cosa consigliabile per variabili statistiche osservate, allora  $\Sigma$  è la matrice di correlazione.

Si vuole trovare una nuova variabile casuale  $Z$  (unidimensionale), combinazione lineare di  $\mathbf{X}$ , che abbia la massima varianza possibile<sup>3</sup>, ossia si cerca un vettore di coefficienti  $\mathbf{y}$  tali che:

$$Z = \mathbf{y}^T \mathbf{X} \quad \text{ha varianza massima}$$

$$\text{col vincolo} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$$

( $\mathbf{y}$  è un vettore normalizzato; il vincolo sui coefficienti è necessario, altrimenti sarebbe possibile trovare combinazioni di varianza grande a piacere).

### Ricerca della prima componente principale

Occorre massimizzare rispetto a  $\mathbf{y}$  la varianza di  $Z = \mathbf{y}^T \mathbf{X}$ :

$$V[Z] = \mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y}$$

col vincolo che  $\mathbf{y}$  sia un vettore di lunghezza 1:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$$

<sup>3</sup>ma qualche volta cercheremo la minima varianza!

Il lagrangiano per questo problema è dato da:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}^\top \mathbf{y} + \lambda$$

Derivando rispetto a  $\mathbf{y}$  si ha:

$$2\Sigma \mathbf{y} - 2\lambda \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

e quindi:

$$\Sigma \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}.$$

La soluzione  $\mathbf{y}$  è dunque fornita dagli autovettori di  $\Sigma$

Per stabilire quale autovalore fornisce il massimo della funzione obiettivo, premoltiplichiamo nell'ultima equazione ambo i membri per  $\mathbf{y}^\top$ :

$$\mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \lambda \mathbf{y}$$

Da questa uguaglianza vediamo che:

- il primo membro è uguale a  $V[Z]$ ;
- Il secondo membro è uguale a  $\lambda$ , per soddisfare il vincolo  $\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1$ ;

In definitiva si ha:  $V[Z] = \lambda$ , per cui l'ottimo si ha in corrispondenza del massimo autovalore di  $\Sigma$ . Pertanto la soluzione ottima  $\mathbf{y}$  è data dall'autovettore  $\gamma_1$  corrispondente al 1° autovalore  $\lambda_1$  di  $V[\mathbf{X}]$

La nuova variabile  $Z$  di varianza massima è dunque data da:

$$Z_1 = \gamma_1^\top \mathbf{X}.$$

Per comodità indico questa nuova variabile con  $Z_1$  anziché con  $Z$ .

Se ora vogliamo trovare una nuova variabile semplice  $Z_2$ , ancora combinazione lineare di  $\mathbf{X}$ , che abbia ancora la maggior varianza, ma con l'ulteriore vincolo di non essere correlata con la prima componente trovata  $Z_1$ , dobbiamo impostare un nuovo problema di massimo:

### Ricerca della seconda componente principale

2° Problema di ottimo vincolato:

Occorre massimizzare la varianza di  $Z_2 = \mathbf{y}^\top \mathbf{X}$

$$V[Z_2] = \mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y}$$

col 1° vincolo che  $\mathbf{y}$  sia sempre un vettore di lunghezza 1:

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1$$

col 2° vincolo che  $Z_2$  non sia correlata con la prima componente  $Z_1$ :

$$\mathbf{y}^\top \Sigma \gamma_1 = 0$$

Il lagrangiano per questo secondo problema è dato da:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{y} + \lambda - \delta \mathbf{y}^T \Sigma \boldsymbol{\gamma}_1$$

Derivando rispetto a  $\mathbf{y}$  si ha:

$$2\Sigma \mathbf{y} - 2\lambda \mathbf{y} - \delta \Sigma \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{0}$$

Si può vedere come la soluzione a questo secondo problema è fornita dall'autovettore di  $\Sigma$  corrispondente al secondo autovalore  $\lambda_2$ ; inoltre

$$V[Z_2] = \lambda_2.$$

In definitiva, ripetendo il procedimento fino a giungere a  $Z_p$ , è possibile trovare  $p$  nuove variabili aleatorie, combinazioni lineari di  $\mathbf{X}$ , a due a due non correlate, e tali che ciascuna  $Z_i$  abbia varianza massima subordinatamente al vincolo di non correlazione con le precedenti variabili  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}$  ed al vincolo di unitarietà dei vettori dei coefficienti.

Ciascuna variabile è data da:

$$Z_i = \boldsymbol{\gamma}_i^T \mathbf{X}, \quad \text{con varianza: } V[Z_i] = \lambda_i$$

In definitiva attraverso la matrice  $\Gamma$  costituita dagli autovettori di  $\Sigma$ , è possibile trovare un nuovo vettore aleatorio  $\mathbf{Z}$ , dato da:

$$\mathbf{Z} = \Gamma^T \mathbf{X},$$

tale che:  $V[\mathbf{Z}] = \Lambda$ .

Dal momento che  $\Gamma^T \Gamma = \mathbf{I}$ , la trasformazione corrisponde ad una rotazione ortogonale degli assi. I nuovi assi definiti dallo spazio degli autovettori sono detti *assi principali* e le nuove variabili  $\mathbf{Z}$  sono le *componenti principali* di  $\mathbf{X}$ .

componenti  
princi-  
pali

### Combinazione lineare di *minima* varianza

In effetti, potremmo impostare il problema al contario, al fine di trovare un modo per misurare l'esistenza di vincoli lineari *quasi esatti* fra le variabili. Dal momento che un vincolo lineare esatto fra variabili aleatorie corrisponde ad una variabile con varianza nulla, potremmo cercare, fra le combinazioni generate da rotazioni ortogonali degli assi, quella di minima varianza, ossia quella che più si avvicina, con i vincoli imposti, ad una combinazione lineare esatta:

la soluzione stavolta è data dall'autovettore  $\boldsymbol{\gamma}_p$  corrispondente a  $\lambda_p$ , autovalore più piccolo.

## 2.2.1 Significato statistico e probabilistico delle componenti principali

Possiamo ora migliorare l'informazione fornita dal rango di una matrice di varianza e covarianza, sia essa teorica o empirica. Infatti anche se  $V[\mathbf{X}]$  è a rango pieno, se dall'esame della sequenza degli autovalori risulta che il più piccolo degli autovalori è molto vicino a zero (relativamente all'ordine di grandezza degli autovalori stessi), ciò implica che esiste una combinazione lineare delle componenti del vettore aleatorio  $\mathbf{X}$  a varianza molto bassa.

E' interessante notare che in questo caso la varianza generalizzata  $|V[\mathbf{X}]|$  risulterà piccola rispetto a  $tr(V[\mathbf{X}])$ , a conferma del fatto che la varianza generalizzata fornisce delle informazioni non tanto sulla variabilità delle singole componenti, quanto sulla variazione congiunta.

Altre interpretazioni geometriche delle componenti principali si hanno per vettori aleatori normali, in termini di assi degli ellissoidi di equiprobabilità, come descritto nelle pagine sulla normale multivariata.

Un'interpretazione più vicina alla logica della regressione lineare si vedrà quando si introdurrà l'analisi delle componenti principali per variabili statistiche multiple osservate.

In effetti l'analisi in componenti principali viene spesso usata nell'analisi esplorativa di dati, specialmente in presenza di un gran numero di variabili rilevate per cercare di lavorare su poche variabili che spieghino molta variabilità dell'insieme dei dati (ossia quelle definite dai primi autovettori). L'utilità pratica di questa tecnica sta nella possibilità di attribuire un significato ai vari fattori. Questo aspetto esplorativo sarà per ora tralasciato.

Non affronto per niente in questo corso, l'argomento dell'eventuale ricerca di combinazioni non lineari di variabili aleatorie che ne spieghino buona parte della varianza. Nel caso di componenti quadratiche il problema è analiticamente affrontabile sebbene computazionalmente più pesante.

# Capitolo 3

## Variabili Statistiche Multiple

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Calcoli statistici in notazione vettoriale</b>	<b>41</b>
3.1.1	Espressione della varianza di una variabile statistica	41
<b>3.2</b>	<b>Definizione della matrice dei dati</b>	<b>45</b>
3.2.1	Dati mancanti	47
<b>3.3</b>	<b>I momenti primi e secondi multivariati</b>	<b>48</b>
3.3.1	La matrice di varianza e covarianza	50
3.3.2	La matrice di correlazione	50
3.3.3	esempio	52
<b>3.4</b>	<b>La matrice degli scarti</b>	<b>54</b>
3.4.1	I momenti di combinazioni lineari di variabili statistiche multiple	56
3.4.2	Rango della matrice di Varianze e Covarianze	58

---

In questa breve sezione richiamo la notazione per insiemi di dati multivariati, attraverso le *matrici di dati*.

In questo contesto vengono rivisti i concetti di momento primo e secondo di variabili statistiche multiple, per i quali è utile adottare un simbolismo compatto, e se ne vedrà il significato. La notazione sarà utile quando si introdurranno anche con degli esempi alcune misure di interdipendenza lineare compresa la **correlazione lineare parziale** (si veda 4 sia per vettori aleatori normali che per variabili statistiche multiple) e l'**analisi in componenti principali** (nel cap. 4.1) e poi nello studio dei modelli lineari 4

## 3.1 Calcoli statistici in notazione vettoriale

In questa sezione mi limito a sottolineare come alcuni calcoli statistici per una e due variabili possano essere riespressi in notazione vettoriale: tale notazione per calcoli statistici non è particolarmente utile se effettivamente si lavora solo con una o due variabili, ma è indispensabile quando trattiamo variabili statistiche multiple.

### 3.1.1 Espressione della varianza di una variabile statistica

Se abbiamo un vettore di  $n$  osservazioni  $\mathbf{x}$  (di media  $M(\mathbf{x})$ ) e il corrispondente vettore degli scarti  $\mathbf{z}$ :<sup>1</sup>

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - M(\mathbf{x}) \\ x_2 - M(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_i - M(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_n - M(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

essendo l' $i$ -esimo scarto:

$$z_i = x_i - M(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

E' facile vedere che:

$$nV[\mathbf{x}] = \sum_{i=1}^n (x_i - M(\mathbf{x}))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n z_i^2 = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{z}^T \mathbf{z}$$

e quindi:

#### Espressione vettoriale della varianza

$$V[\mathbf{x}] = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}{n}$$

<sup>1</sup>Anche se superfluo, ricordo che in tutto questo testo i vettori sono sempre colonna, per cui se devo indicare un vettore riga userò un vettore trasposto.

Per indicare gli scarti di una variabile dalla propria media userò qualche volta la notazione  $\bar{x}$  e qualche volta ricorrerò ad un simbolo specifico, come  $\mathbf{z}$ , opportunamente definito nel testo.

### Espressione vettoriale della covarianza

In modo simile, possiamo utilizzare una notazione vettoriale per indicare la **covarianza** fra due variabili statistiche  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , per le quali abbiamo  $n$  coppie di osservazioni  $(x_i, y_i)$ ; indichiamo con  $\bar{x}_i$  e  $\bar{y}_i$  gli scarti dalle rispettive medie della  $\mathbf{x}$  e della  $\mathbf{y}$ :

$$\bar{x}_i = x_i - M(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \bar{y}_i = y_i - M(\mathbf{y}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e corrispondentemente i vettori degli scarti:

$$\bar{\mathbf{x}}^\top = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n\} \quad \bar{\mathbf{y}}^\top = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_i, \dots, \bar{y}_n\}$$

Pertanto è immediato vedere come esprimere in notazione vettoriale la covarianza fra le due variabili statistiche  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned} n\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(\mathbf{x}))(y_i - M(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i = \\ &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_i \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}}^\top \bar{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

ed infine:

$$\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{\bar{\mathbf{x}}^\top \bar{\mathbf{y}}}{n}$$

Ricordo la proprietà per la quale si può esprimere la covarianza senza ricorrere alle somme di scarti che diventa, ancora in notazione vettoriale:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(\mathbf{x}))(y_i - M(\mathbf{y}))}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - M(\mathbf{x})M(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}{n} - M(\mathbf{x})M(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Espressione vettoriale della covarianza

$$\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{n} - M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})$$

BOZZE MARCELLO CHIODI 2022

### Espressione vettoriale della media aritmetica

E' facile vedere che in notazione matriciale possiamo esprimere anche una media aritmetica, anche se per ora l'utilità della notazione non è grande.

Da ora in poi indicheremo con  $\mathbf{1}_k$  un vettore colonna di  $k$  elementi tutti uguali ad 1:

$$\mathbf{1}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (k \text{ volte})$$

Con l'introduzione di questo nuovo elemento possiamo scrivere:

### Espressione vettoriale della media aritmetica

$$M(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{1}_n}{n}$$

Praticamente la moltiplicazione di un vettore riga per un vettore  $\mathbf{1}_n$  ci permette di scrivere una sommatoria semplice in termini di prodotto vettoriale

## 3.2 Definizione della matrice dei dati

Supponiamo di avere l'informazione relativa a  $n$  unità su cui sono state rilevate  $p$  variabili statistiche *quantitative*.

in questa fase di definizione del simbolismo che adotteremo per un insieme di dati multivariato, non ci preoccuperemo del fatto che queste unità costituiscano una popolazione completa o invece un campione (casuale semplice o di qualsiasi altro tipo): supponiamo che si tratti comunque dell'intera informazione disponibile dall'osservazione, comunque essa sia stata ottenuta.

Quando introdurremo particolari modelli di dipendenza e di interdipendenza, faremo delle opportune assunzioni sul modello generatore dei dati.

**L'informazione completa è per noi costituita da una matrice di dati  $\mathbf{X}_{[n \times p]}$ .**

La matrice  $\mathbf{X}$  ( $n$  righe e  $p$  colonne), di elemento generico  $x_{ij}$  è data dai valori osservati di  $p$  variabili (che per ora supporremo quantitative), per ciascuna delle  $n$  unità statistiche:

$$\mathbf{X}_{[n \times p]} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_p \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np} \\ \hline \end{pmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ \dots \\ \dots \\ U_i \\ \dots \\ U_n \end{matrix}$$

$$\text{Medie} = \{M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_p\}$$

L'informazione relativa ad una unità  $U_i$  è dunque costituita dalla riga  $i$ -esima delle  $p$  osservazioni relative alle  $p$  variabili:

**$i$ -esima unità (riga)**

$$U_i = \{x_{i1}; x_{i2}; \dots; x_{ij}; \dots; x_{ip}\}^T; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

L'informazione (univariata) relativa alla  $j$ -esima variabile  $X_j$  è contenuta nella  $j$ -esima colonna:

$j$ -esima variable (colonna)

$$X_j = \{x_{1j}; x_{2j}; \dots; x_{ij}; \dots; x_{nj}\}; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

BOZZE MARCELLO CHIODI 2020

### 3.2.1 Dati mancanti

Non verranno prese in considerazione in questo momento le problematiche derivanti da matrici di dati incomplete, ossia in cui alcune delle osservazioni  $x_{ij}$  relative ad uno o più casi ed ad una o più variabili sono mancanti.

Alcune di queste problematiche verranno riprese più avanti, in particolare nel corso di esercitazioni e nei laboratori.

Purtroppo, pur sembrando una banalità la gestione dei valori mancanti (*missing data*), è molto complessa e può essere affrontata soltanto con un bagaglio di consocenze teoriche e pratiche molto profondo. Tuttavia, trattandosi di un problema ricorrente nell'analisi di dati reali, fornirò al momento opportuno qualche tecnica elementare per affrontarlo.

E' importante adesso ricordare alcune cose:

- Gli insieme di dati *completi* sono di solito utilizzati per comodità negli esempi didattici. La realtà ahinoi è più cruda.
- E' improbabile trovare nella realtà insiemi di dati *completi*. I dati mancanti sono sempre in agguato.
- Diffidate di dati grezzi *completi*. E' possibile che qualcuno abbia già stimato in qualche modo i valori mancanti.
- E' importante capire se i dati mancanti sono mancanti per caso (*MAR=missing at random*) oppure in funzione dei valori di qualche variabile (argomento che non verrà approfondito in queste righe).
- R indica i dati mancanti come NA (ossia: not available). Quando si utilizza R (o qualsiasi altro linguaggio) accertarsi sempre se il proprio data frame contiene dati mancanti (per esempio con l'istruzione `is.na()`) e controllare come le diverse funzioni trattano i dati mancanti. .

### 3.3 I momenti primi e secondi (multivariati) di una variabile statistica multipla

Ritornando alle ordinarie matrici di dati a due vie, che rappresentano le  $n$  rilevazioni di  $p$  variabili, la media aritmetica di ciascuna variabile è data da:

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Il vettore delle medie è costituito dalle  $p$  medie aritmetiche:

$$M(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_j \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}$$

Se consideriamo una rappresentazione geometrica delle  $n$  unità statistica, la nostra matrice dei dati costituisce l'insieme delle coordinate di  $n$  punti in uno spazio  $p$ -dimensionale.

Il punto di coordinate  $M(\mathbf{X})$  è detto *centroide* dell'insieme multivariato di dati.

E' facile vedere che in notazione matriciale possiamo esprimere  $M(\mathbf{X})$  mediante la relazione:

$$M(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{1}_n / n$$

Abbiamo ancora indicato con  $\mathbf{1}_n$  un vettore colonna di  $n$  elementi tutti uguali ad 1.

$$\mathbf{1}_k^T = (1, \dots, 1, \dots, 1), \quad k \text{ volte}$$

Per i momenti del secondo ordine si ha:

la varianza della singola variabile  $X_j$ :

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - M_j)^2 / n \quad j = 1, 2, \dots, p$$

la covarianza fra la variabile  $X_j$  e la variabile  $X_k$ :

$$\sigma_{jk} = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - M_j)(x_{ik} - M_k) / n \quad j = 1, 2, \dots, p \quad k = 1, 2, \dots, p$$

E' noto che tali relazioni riguardanti momenti secondi centrali, sono esprimibili in termini dei momenti primi e secondi con origine lo zero:

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^n x_{ij}^2/n - M_j^2 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$\sigma_{jk} = \sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik}/n - M_jM_k \quad j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, p;$$

BOZZE MARCELLO CHIODI 2020

### 3.3.1 La matrice di varianza e covarianza

Avendo richiamato la definizione ed il calcolo delle medie, delle varianze e delle covarianze, possiamo definire la matrice di varianza e covarianza:

#### Matrice di varianza e covarianza

$$V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1i} & \dots & \sigma_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1i} & \dots & \sigma_i^2 & \dots & \sigma_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1p} & \dots & \sigma_{ip} & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

Per gli elementi sulla diagonale principale di  $V[\mathbf{X}]$ , ossia per le varianze delle singole componenti, invece della notazione  $\sigma_{ii}$  si impiega la notazione  $\sigma_i^2$  per uniformità col simbolismo nel caso univariato.

Userò quasi sempre il simbolo  $V(\cdot)$  con l'intesa che se l'argomento è una matrice di dati indica una matrice di varianza e covarianza campionaria; se l'argomento è una variabile statistica semplice allora sarà una varianza campionaria; userò lo stesso simbolo anche per matrici di varianza e covarianza di variabili aleatorie

### 3.3.2 La matrice di correlazione

Si può definire la matrice di correlazione di elemento generico:

$$r_{ij} = \{R(\mathbf{X})\}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

che, ovviamente, è simmetrica ed ha elementi diagonali tutti uguali ad uno:

matrice  
di corre-  
lazione

### Matrice di correlazione empirica di $p$ variabili statistiche

$$r_{ij} = \{R(\mathbf{X})\}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$$R(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1i} & \dots & 1 & \dots & r_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1p} & \dots & r_{ip} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Misura le correlazioni **lineari** fra le coppie di variabili.  
E' essenziale anche come strumento esplorativo.

**La matrice di correlazione è uguale alla matrice di varianza e covarianza delle corrispondenti variabili standardizzate**

### Misura simmetrica di interdipendenza

Distinguere il significato di  $r$  ed  $r^2$   
Indice di interdipendenza (misura simmetrica)

### 3.3.3 esempio

[esempio da fare con file esempiocor Rmd](#)

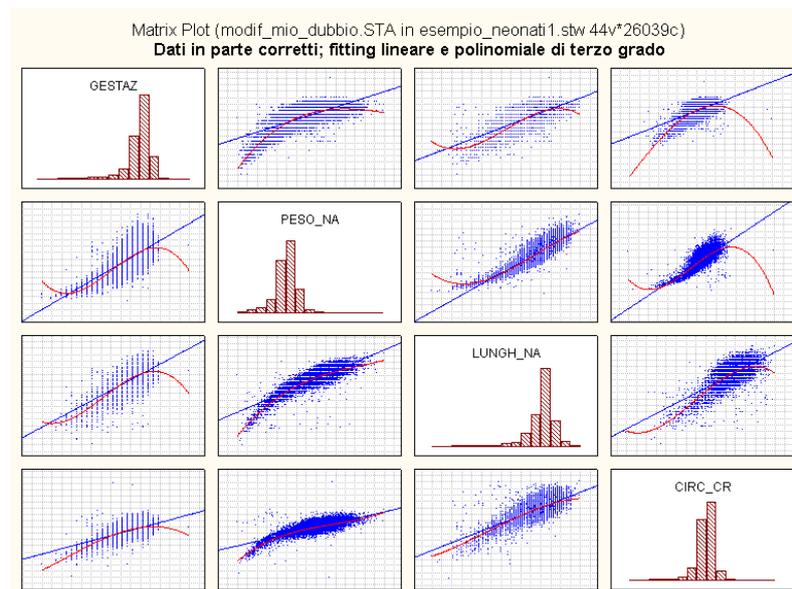


Figura 3.1: matrice di grafici di 4 variabili

Correlations (neonati_eseempio2003dati.sta)				
Marked correlations are significant at p < .05000				
N=24688 (Casewise deletion of missing data)				
Variable	GESTAZ	PESO_NA	LUNGH_NA	CIRC_CR
GESTAZ	1.00	0.67	0.70	0.57
PESO_NA	0.67	1.00	0.84	0.75
LUNGH_NA	0.70	0.84	1.00	0.69
CIRC_CR	0.57	0.75	0.69	1.00

Figura 3.2: Matrice di correlazione delle 4 variabili dell'esempio dei neonati

### 3.4 La matrice degli scarti

E' utile spesso fare riferimento alla matrice degli scarti  $\mathbf{Z}$ , il cui generico elemento è definito da:

$$z_{ij} = x_{ij} - M_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Si faccia attenzione al fatto che lo scarto va effettuato rispetto alla media della colonna corrispondente

$$\mathbf{Z}_{[n \times p]} = \begin{pmatrix} x_{11} - M_1 & x_{12} - M_2 & \dots & x_{1j} - M_j & \dots & x_{1p} - M_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x_{i1} - M_1 & x_{i2} - M_2 & \dots & x_{ij} - M_j & \dots & x_{ip} - M_p \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x_{n1} - M_1 & x_{n2} - M_2 & \dots & x_{nj} - M_j & \dots & x_{np} - M_p \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{U}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{U}_i \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{U}_n \end{matrix}$$

Indichiamo ciascuna colonna con  $\mathbf{z}_j$ . Evidentemente le nuove variabili  $Z_j$  risultano a media nulla:

$$M \{Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p\} = \{0, 0, \dots, 0, \dots, 0\} = \mathbf{0}_p^T$$

Adesso possiamo esprimere in modo compatto la generica covarianza  $\sigma_{jk}$  (anzi la **codevianza**) in funzione delle colonne  $\mathbf{z}_j$  e  $\mathbf{z}_k$ :

$$n \sigma_{jk} = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - M_j)(x_{ik} - M_k) = \sum_{i=1}^n z_{ij} z_{ik} =$$

$$= (z_{1j}, \dots, z_{ij}, \dots, z_{nj}) \begin{pmatrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{ik} \\ \vdots \\ z_{nk} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_j^T \mathbf{z}_k$$

Con questa posizione di comodo, è facile ora vedere che la matrice di varianza e covarianza  $p \times p$  delle variabili  $X_j$  (o delle variabili  $Z_j$ ) è espressa in forma matriciale compatta:

$$V[\mathbf{X}] = V[\mathbf{Z}] = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} / n$$

Si può anche vedere che:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{1}_n M(\mathbf{X})^T = \mathbf{X} - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{X} / n = (\mathbf{I} - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T / n) \mathbf{X}$$

$$\begin{aligned} V[\mathbf{X}] &= V[\mathbf{Z}] = [\mathbf{X}^\top - M(\mathbf{X})\mathbf{1}_n^\top][\mathbf{X} - \mathbf{1}_n M(\mathbf{X})^\top]/n = \\ &= \mathbf{X}^\top \mathbf{X}/n - M(\mathbf{X})M(\mathbf{X})^\top \end{aligned}$$

ricordando, per l'ultimo passaggio, che:

$$[\mathbf{X}^\top - M(\mathbf{X})\mathbf{1}_n^\top][\mathbf{1}_n M(\mathbf{X})^\top]/n = 0 \quad \text{e} \quad M(\mathbf{X})\mathbf{1}_n^\top \mathbf{X}/n = M(\mathbf{X})M(\mathbf{X})^\top.$$

Oppure, dalla relazione prima vista:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n) \mathbf{X},$$

si ha:

$$\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} = \mathbf{X}^\top (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n)^\top (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n) \mathbf{X};$$

e considerando che la matrice  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n)$  è simmetrica e *idempotente*, si ha infine:

$$\begin{aligned} nV[\mathbf{X}] &= nV[\mathbf{Z}] = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} = \mathbf{X}^\top (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n)^\top (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n) \mathbf{X} = \\ &= \mathbf{X}^\top (\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top / n) \mathbf{X}; \end{aligned}$$

Si vedrà a proposito anche l'espressione della devianza residua nell'analisi dei modelli lineari, che è formalmente analoga a questa espressione.

Come si vede, si ottengono risultati già noti nel caso a una e due variabili sui momenti primi e secondi; la notazione matriciale permette di ottenere risultati anche mnemonicamente simili a quelli più che noti del caso univariato.

E' appena il caso di osservare che mentre la notazione matriciale fornisce espressioni compatte ed è inoltre implementabile facilmente negli ambienti di programmazione che supportano operazioni matriciali, difficilmente fornisce gli algoritmi più efficienti per il calcolo dei momenti multivariati. Raccomando sempre in R di utilizzare le funzioni già disponibili per `data.frame` o per matrici quali `cov()`, `cor()`

### 3.4.1 I momenti di combinazioni lineari di variabili statistiche multiple

Per i momenti di combinazioni lineari di una variabile multipla valgono ovviamente relazioni del tutto analoghe a quelle valide per combinazioni lineari di vettori di variabili aleatorie:

Costruiamo una nuova variabile statistica a  $k$  componenti, mediante una qualsiasi trasformazione lineare delle variabili  $X_j$ , colonne della matrice dei dati  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{c}^T$$

La matrice  $\mathbf{A}_{[k \times p]}$  ha  $k$  righe e  $p$  colonne e per il resto è qualsiasi, nel senso che il suo rango può anche essere inferiore a  $\min(k, p)$ .

Il vettore  $\mathbf{c}_{[k \times 1]}$  ha  $k$  elementi.

La nuova matrice di dati  $\mathbf{Y}$  ha  $n$  righe e  $k$  colonne. Con semplici passaggi si vede come data la matrice  $\mathbf{A}$  e il vettore  $\mathbf{c}$  è possibile ottenere tutti i momenti di  $\mathbf{Y}$  in funzione di quelli di  $\mathbf{X}$  :

$$M[\mathbf{Y}] = M[\mathbf{X}]\mathbf{A}^T + \mathbf{c} \quad (3.1)$$

$$V[\mathbf{Y}] = V[\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{c}^T] = \mathbf{A}V[\mathbf{X}]\mathbf{A}^T \quad (3.2)$$

Formule più complesse valgono per i momenti multivariati di ordine superiore al secondo, ma è possibile ricavare tutti i momenti (multivariati) di grado  $m$  di  $\mathbf{Y}$ , sia centrali che non centrali, a partire dalla conoscenza della matrice di trasformazione  $\mathbf{A}$  e dei momenti multivariati di grado  $1, 2, \dots, m$  di  $\mathbf{X}$ .

Come per le variabili statistiche semplici i momenti multivariati di ordine superiore al secondo forniscono degli indici di forma multivariati, degli indicatori di allontanamento dalla multinormalità, indici di non linearità delle regressioni e di eteroscedasticità, ma non ne farò uso in questo corso.

#### I momenti di combinazioni lineari di variabili statistiche multiple

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{c}^T$$

$$M(\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{c}^T) = M(\mathbf{X})\mathbf{A}^T + \mathbf{c} \quad \text{Vettore delle medie}$$

$$V[\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{1}_n\mathbf{c}^T] = \mathbf{A}V[\mathbf{X}]\mathbf{A}^T \quad \text{Matrice di varianza e covarianza}$$

In particolare se  $k = 1$  allora  $\mathbf{A}$  è un vettore riga  $\mathbf{b}^T$ ,  $\mathbf{c}$  è uno scalare  $c$  e  $\mathbf{Y}$  è una v.c. semplice (ossia scalare) e si ha:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + c$$

e quindi:

$$\begin{aligned}M(\mathbf{y}) &= \mathbf{b}^T M(\mathbf{X}) + c = b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + \dots + b_p\mu_p + c \\V[\mathbf{y}] &= \mathbf{b}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{b} = \\&= b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + \dots + b_i^2\sigma_i^2 + \dots + b_p^2\sigma_p^2 + \\&+ 2b_1b_2\sigma_{12} + \dots + 2b_ib_j\sigma_{ij} + \dots + 2b_{p-1}b_p\sigma_{p-1,p}\end{aligned}$$

Dall'espressione precedente si ricava immediatamente una proprietà che sarà molto utile:

### Forme quadratiche e combinazioni lineari

Una forma quadratica con matrice di coefficienti data da una matrice di varianza e covarianza  $V[\mathbf{X}]$  esprime sempre la varianza di una combinazione lineare delle  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{b}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{b} = V[\mathbf{X}\mathbf{b}]$$

### Positività delle matrici di varianza e covarianza

Una matrice di varianza e covarianza è quindi sempre **semidefinita positiva** .  
essendo  $V[\mathbf{Y}] \geq 0$ , in quanto una varianza è sempre non negativa, allora:

$$\mathbf{t}^T V[\mathbf{X}] \mathbf{t} = V[\mathbf{X}\mathbf{t}] \geq 0, \forall \mathbf{t}, \mathbf{t} \neq 0$$

### 3.4.2 Rango della matrice di varianza e covarianza ( $n \geq p$ )

- Se una variabile statistica è combinazione lineare delle altre  $p - 1$ , allora il rango della matrice di varianza e covarianza di  $\mathbf{X}$  risulta uguale a  $p - 1$ ; (con  $n \geq p$ )
- in generale il rango di  $V[\mathbf{X}]$  risulta uguale a  $p - v$  se  $v$  componenti sono ottenute attraverso combinazioni lineari (indipendenti) degli elementi di  $\mathbf{X}$ .
- il rango di  $V[\mathbf{X}]$  risulta uguale esattamente a  $p$  (ossia a rango pieno) se e solo se le componenti di  $\mathbf{X}$  sono linearmente indipendenti (con  $n \geq p$ ).

## Capitolo 4

### link esterni e argomenti mancanti

```
\label{sec:corrparz}
\label{sec:acp}
\label{sec:modlin}
\label{sec:normalemulti}
\label{eq:distcondnormbiv1}
\esempiord{esempiocor}
\esempiord{esempioBMP1}
\esempiord{MahalaNobis}
\esempiord{trivariatenormal}
\esempiord(inversa)
\esempiord{codice R}
\esempiord{PCA}
statistica3_2020provetrinorm1.R

\href{./examples/stat3_firstslides2.html}{un esempio}
\href{./examples/MLA2019normale.pdf}{La normale multivariata}
```

forse bisogna uniformare la notazione sui cofattori  
 cenno a risultati sull'inferenza multivariata? Wilks, etc.  
 dire qualcosa su unicità, suff. congiunta, fattorizzazione verosimiglianza, effi-  
 cienza, etc.???

verificare se la matrice  $\tilde{A}$  è unica nella diagonalizzazione

nella dirichlet

```
\begin{fig}
\begin{fig}
```

```
in bivar1.nb
```

```
\end{fig}
```

```
FIG2000REGR_ETER01.STG
```

```
\end{fig}
```

Esempi di densità di distribuzioni di Dirichlet:

```
\section{La distribuzione multinomiale}\label{sec:multinomiale}
```

```
\begin{fig}
in bivar1.nb
\end{fig}
```

Distribuzione Esponenziale Bivariata  $(a=0,7)$

\$\$

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = (1 - \text{Exp}[-\vec{x}]) (1 - \text{Exp}[-\vec{y}]) (1 + a \text{Exp}[-\vec{x} - \vec{y}])$$

\$\$

```
\begin{fig}
in bivar1.nb
\end{fig}
```

Distribuzione Bivariata Dirichlet

$(\text{mBeta-bivariata}) \quad a=1,5;$   
 $\vec{c}=1,6; \quad c=2,1$

```
\begin{fig}
in bivar1.nb
\end{fig}
```

Distribuzione Bivariata Dirichlet

```
(\mBeta-bivariata) $a=4;  
\vecb=4; c=3$
```

```
\begin{fig}
```

```
in bivar1.nb
```

```
\end{fig}
```

Distribuzione Bivariata Dirichlet

```
(\mBeta-bivariata) $a=1,1;
```

```
\vecb=1,1; c=0,9$
```

```
\begin{fig}
```

```
in bivar1.nb
```

```
\end{fig}
```

BOZZE MARCELLO CHIOLDI 2020

## 4.1 Cenni all'analisi in componenti principali

### Contents

---

<b>4.1 Cenni all'analisi in componenti principali</b> . . . . .	<b>62</b>
4.1.1 Richiamo su autovalori e autovettori . . . . .	64
4.1.2 Esempio . . . . .	68
<b>4.2 ANALISI DELLE COMPONENTI PRINCIPALI</b> . . . . .	<b>84</b>
4.2.1 ACP per variabili statistiche osservate . . . . .	89
4.2.2 Distribuzione campionaria degli autovalori . . . . .	93
4.2.3 significato dei primi due momenti multivariati empirici . . . . .	95

---

FORSE IN UN ALTRA PARTE

#### Rango di una matrice di varianza e covarianza

La sola conoscenza del rango di una matrice di varianza e covarianza ci dice poco sul tipo di interrelazioni (eventualmente lineari) esistenti fra le  $p$  componenti: ci dice solo se esistono uno o più *legami lineari esatti*.

Si può chiarire questo concetto esaminando il caso più semplice, ossia quello di una coppia di variabili standardizzate con

$$V[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

Le due variabili sono esattamente collineari solo se  $|r| = 1$ ; tuttavia, avendo solo due variabili, tutta l'informazione relativa all'interdipendenza lineare è riassunta nell'indice  $r$ : oltre al caso di perfetta collinearità, abbiamo anche i casi di valori di  $|r|$  molto vicini ad 1, ossia quando i punti tendono a disporsi lungo una retta.

Con due variabili comunque l'informazione sulla correlazione lineare fra le variabili è contenuta nell'indice di correlazione lineare  $r$ .  $r^2$  misura sia la porzione di varianza di  $X_1$  spiegata dalla regressione su  $X_2$ , sia la porzione di varianza di  $X_2$  spiegata dalla regressione su  $X_1$ .

Quando però abbiamo più di due variabili, come possiamo misurare la tendenza dei dati a manifestare una *quasi collinearità*? Con  $p > 2$  non possiamo ricorrere alle correlazioni semplici, che misurano la correlazione lineare per una coppia di variabili; per risolvere il problema ci verranno in aiuto le proprietà degli autovalori e degli autovettori di una matrice di varianze e covarianze.

E come misurare il fatto che le variabili statistiche sembrano globalmente correlate? Non possiamo certamente considerare una media delle correlazioni a coppia (o dei loro quadrati, o dei loro valori assoluti) perchè sarebbero quantità senza un particolare significato statistico.

E come misurare una situazione di quasi collinearità fra le variabili? Ossia l'esistenza di vincoli lineari fra le variabili *quasi esatti*?

Conviene rifarsi a concetti ben definiti e interpretabili, quali la variabilità e la correlazione, e cercare di estenderle ad un insieme multivariato per cercare di ottenere una misura di correlazione globale.

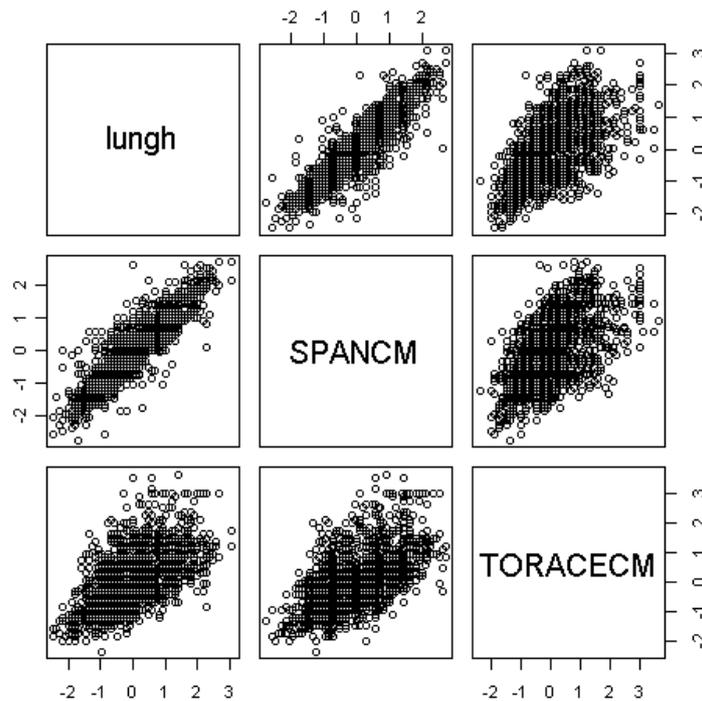


Figura 4.1: Tre variabili correlate: matrice di grafici di punti di tre variabili molto correlate; tuttavia il rango della matrice di varianza e covarianza è 3 perchè non vi sono vincoli lineari esatti.

### 4.1.1 Richiamo su autovalori e autovettori

Richiamo adesso qualche proprietà degli autovalori e degli autovettori delle matrici di varianze e covarianze. Vedremo come ci possono essere utili:

- per cogliere alcuni aspetti della struttura di correlazione fra le  $p$  variabili
- per valutare quanto le  $p$  variabili osservate si avvicinino ad una situazione di collinearità esatta.

Per semplificare i calcoli supponiamo che le nostre variabili siano sostituite con gli scarti dalle rispettive medie, in modo da lavorare con variabili a media nulla:  $M(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ .

In effetti in seguito converrà ancora meglio lavorare con variabili standardizzate, in modo che la diversa variabilità o la diversa unità di misura non intervengano nelle analisi che condurremo: **un insieme di variabili standardizzate si caratterizza soltanto per la struttura di correlazione!**

Indichiamo con  $\boldsymbol{\gamma}_j$  un autovettore di  $V[\mathbf{X}]$ , (normalizzato, ossia con  $\boldsymbol{\gamma}_j^T \boldsymbol{\gamma}_j = 1$ ) e con  $\lambda_j$  il corrispondente autovalore; allora si ha:

$$\boldsymbol{\gamma}_j^T V[\mathbf{X}] \boldsymbol{\gamma}_j = \boldsymbol{\gamma}_j^T \lambda_j \boldsymbol{\gamma}_j = \lambda_j$$

La prima delle precedenti eguaglianze deriva dalla definizione degli autovettori e degli autovalori; la seconda eguaglianza deriva dalla condizione di normalizzazione degli autovettori  $\boldsymbol{\gamma}_j^T \boldsymbol{\gamma}_j = 1$ .

Deriva dall'equazione fondamentale:

$$V[\mathbf{X}] \boldsymbol{\gamma}_j = \lambda_j \boldsymbol{\gamma}_j$$

e con la convenzione che gli autovalori siano ordinati in senso decrescente:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  (in effetti per alcune delle scomposizioni fatte occorrerebbe anche ipotizzare che siano tutti distinti, ma per ora non è necessario precisare altro)

**ovviamente saranno tutti non negativi!** dal momento che una matrice di varianze e covarianze è sempre semidefinita positiva

Indichiamo adesso con  $Z_j$  una combinazione lineare delle variabili  $X$ , ottenuta usando come coefficienti le componenti di uno degli autovettori  $\gamma_j$ :

$$Z_j = \mathbf{X}\gamma_j \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Per calcolare media e varianza della nuova variabile  $Z_j$ , applichiamo le proprietà 3.1 sui momenti di combinazioni lineari di variabili statistiche multiple:

$$M[Z_j] = \gamma_j^T M[\mathbf{X}] = \gamma_j^T \mathbf{0} = 0 \quad (4.1)$$

$$V[Z_j] = \gamma_j^T V[\mathbf{X}] \gamma_j = \lambda_j \quad (4.2)$$

Adesso siamo in grado di dare una definizione intuitiva ed una quantificazione del concetto esposto prima, ossia di collinearità quasi esatta, anche nel caso di un numero  $p$  di variabili superiore a 2.

Supponiamo che  $\lambda_p$  (ossia il più piccolo degli autovalori) sia prossimo a zero: questo vuol dire, impiegando la 4.1, che  $Z_p$ , variabile statistica a media zero, ha varianza ( $\lambda_p$ ) molto piccola e quindi ha elementi  $z_{ip}$  ( $i, n = 1, 2, \dots$ ) tutti molto vicini a zero; ossia è una situazione di *quasi collinearità*; solo se gli elementi  $z_{ip}$  ( $i, n = 1, 2, \dots$ ) fossero tutti uguali a zero, caso che si verifica se e solo se  $\lambda_p = 0$ , parleremmo di collinearità esatta, cioè nel caso in cui esiste un vettore  $\mathbf{b}$  tale che:

$$\mathbf{Xb} = \mathbf{0} \quad \text{collinearità esatta}$$

Con  $\lambda_p \approx 0$ , parleremo di collinearità quasi esatta, ossia esiste una combinazione lineare delle variabili  $X_j$  con varianza molto piccola:

$$V[\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}_p] = \lambda_p \approx 0 \quad \text{collinearità approssimata}$$

quali sono i coefficienti di questa combinazione lineare? Ovviamente gli elementi dell'autovettore  $\boldsymbol{\gamma}_p$  che, ricordo, sono scalati in modo tale che  $\boldsymbol{\gamma}_p^T \boldsymbol{\gamma}_p = 1$ . Quindi le variabili  $X_j$  che corrispondono agli elementi di maggior valore assoluto in  $\boldsymbol{\gamma}_p$  sono quelle che più pesano nel causare la collinearità.

### 4.1.2 Esempio

questi esempi sono un po' datati si possono saltare [4.2](#)

Per chiarire i concetti precedenti inizio con un esempio semplicissimo <sup>1</sup>; nella tavola che segue è riportata la matrice di correlazione di tre variabili (ossia la matrice di varianze e covarianze di tre variabili standardizzate):

1,000	0,346	0,694
0,346	1,000	-0,435
0,694	-0,435	1,000

Nella figura è riportata la matrice dei grafici di dispersione per coppie di variabili: è difficile rendersi conto del grado di collinearità fra le tre variabili; possiamo solo vedere che le variabili sono correlate a due a due (potremmo vedere dell'altro in effetti, dall'intera matrice di correlazione)

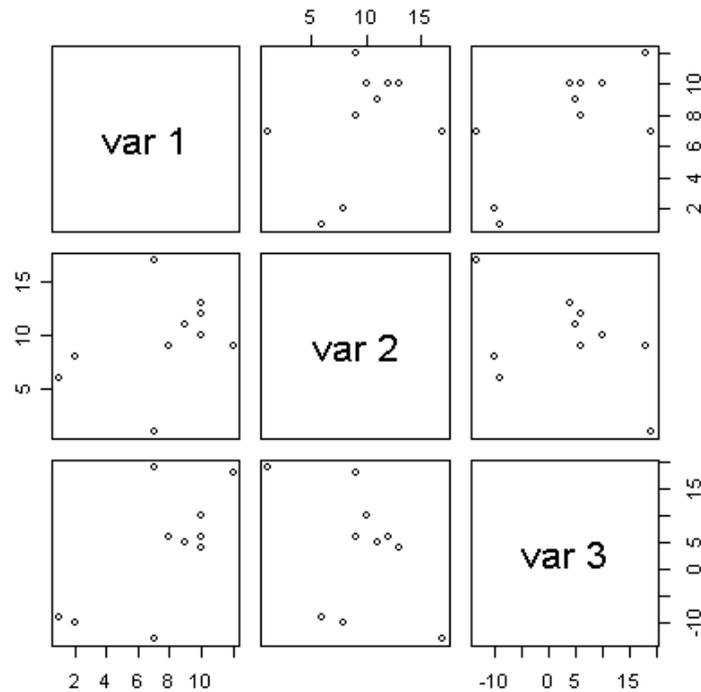


Figura 4.2: Matrice dei grafici di dispersione fra le tre variabili

<sup>1</sup>tanto semplice che si può anche fare con carta penna e calcolatrice

Proviamo ad analizzare gli autovalori della matrice di correlazione:

$$\lambda_1 = 1,7 \quad \lambda_2 = 1,3 \quad \lambda_3 = 0.$$

L'ultimo è nullo: vuol dire che esiste un *vincolo lineare esatto* fra le tre variabili. In effetti dai dati riportati qui sotto è facile vedere che  $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ .

x1	x2	x3
10	10	10
1	6	-9
2	8	-10
10	13	4
8	9	6
7	17	-13
10	12	6
12	9	18
7	1	19
9	11	5

Se vogliamo ragionare sulle combinazioni lineari esistenti fra le variabili originarie, dobbiamo calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice di varianze e covarianze:

Matrice di varianze e covarianze

$$\begin{array}{ccc} 12,71 & 5,27 & 27,60 \\ 5,27 & 18,27 & -20,73 \\ 27,60 & -20,73 & 124,27 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 133,86 \quad \lambda_2 = 21,38 \quad \lambda_3 = 0.$$

Per trovare i coefficienti della combinazione lineare nulla, occorre considerare il terzo autovettore, ossia la terza colonna della matrice degli autovettori:

$$\gamma_{13} = 0,80178 \quad \gamma_{23} = -0,53452 \quad \gamma_{33} = -0,26726.$$

Ricordo che secondo la convenzione da noi adottata in questo contesto, gli autovettori sono normalizzati, ossia la somma dei quadrati delle componenti di ciascun autovettore è uguale ad uno. Il segno dell'autovettore invece è arbitrario, ossia non cambia nulla se si cambiano di segno tutte le componenti di un autovettore; tornando ai coefficienti vediamo subito che:

$$\gamma_{13} = -3\gamma_{33} \quad \gamma_{23} = 2\gamma_{33}$$

cosa che ci conferma quanto avevamo già constatato dai dati, ossia che i tre coefficienti della combinazione lineare esattamente nulla sono proporzionali ai numeri:  $\{3, -2, -1\}$ .

Ovviamente, ed è facile verificarlo empiricamente, lo stesso vincolo sussiste fra le colonne (o fra le righe) della matrice di varianze e covarianze. In generale è diverso dal vincolo esistente sulla matrice di correlazione, dato che i coefficienti vanno riferiti alle variabili standardizzate e sono proporzionali alle colonne degli autovettori della matrice di correlazione.

Proviamo ora a rendere più complicato l'esempio (perchè in effetti con tre sole variabili e pochi dati non è difficilissimo rendersi conto se esiste un vincolo lineare esatto fra le tre colonne della matrice dei dati): prima di passare ad un esempio più statistico, continuiamo a ragionare su vincoli lineari esatti; se abbiamo molte variabili non è facile rendersi conto dell'esistenza di vincoli lineari, anche se esatti, su alcune delle variabili.

BOZZE MARCELLO CHIODI 2020

Consideriamo questa matrice di dati (20 unità e 10 variabili):

[1,]	66	46	44	72	40	53	63	49	56	39
[2,]	41	43	61	67	37	51	51	34	50	50
[3,]	42	48	70	56	58	49	62	42	47	39
[4,]	49	56	77	54	58	55	42	51	47	54
[5,]	20	30	46	45	30	77	48	61	52	38
[6,]	37	45	57	55	48	58	55	48	22	53
[7,]	51	52	71	50	46	65	34	49	68	72
[8,]	53	62	58	47	49	53	45	42	45	49
[9,]	37	59	66	57	34	51	34	55	49	54
[10,]	44	48	52	48	54	46	51	51	63	44
[11,]	58	66	63	38	57	33	49	53	54	46
[12,]	46	53	60	41	77	46	51	39	51	40
[13,]	50	66	54	53	35	51	52	33	59	46
[14,]	57	53	51	46	44	48	43	57	56	51
[15,]	64	59	45	66	50	63	57	75	42	54
[16,]	48	57	34	41	38	54	69	54	49	50
[17,]	63	50	58	46	46	44	38	45	56	30
[18,]	28	46	70	55	48	40	55	50	63	42
[19,]	45	40	52	51	40	48	59	56	42	66
[20,]	60	25	62	49	55	48	44	56	58	38

Per brevità non riporto la matrice di varianze e covarianze, ma solo gli autovalori:

496,014 380,154 173,378 121,388 112,376  
68,869 52,127 28,941 0,000 0,000.

Gli ultimi due autovalori sono nulli, quindi esistono due vincoli lineari esatti; per vedere quali variabili coinvolgono, occorre esaminare i coefficienti del nono e del decimo autovettore:

[1,] " 0.000" " -0.000"  
[2,] " -0.053" " -0.575"  
[3,] " 0.407" " -0.037"  
[4,] " -0.053" " -0.575"  
[5,] " -0.000" " 0.000"  
[6,] " 0.813" " -0.075"  
[7,] " 0.053" " 0.575"  
[8,] " -0.407" " 0.037"  
[9,] " 0.000" " -0.000"  
[10,] " -0.000" " 0.000"

Si vede subito che le variabili coinvolte sono quelle con indici 2,3,4,6,7 e 8.

saltare

Vediamo adesso un esempio più utile e realistico, perchè questi ultimi due esempi trattavano situazioni costruite con collinearità esatta, improbabili da verificarsi con esattezza: in ogni caso non comportano problematiche di tipo statistico, perchè è sufficiente identificare le variabili coinvolte nei vincoli esatti.

chiarire

Vogliamo vedere invece come utilizzare le informazioni date dagli autovalori per identificare e quantificare vincoli lineari non esatti.

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	10	10	11
[2,]	1	6	15
[3,]	2	8	22
[4,]	10	13	19
[5,]	8	9	14
[6,]	7	17	39
[7,]	10	12	16
[8,]	12	9	6
[9,]	7	1	-9
[10,]	9	11	16

Esempio 4.1.1  $n = 20, p = 4$

$$\mathbf{X}_{[20,4]} = \begin{pmatrix} 36 & 1930 & 435 & 304 \\ 36 & 2100 & 440 & 315 \\ 40 & 2920 & 470 & 321 \\ 36 & 2900 & 480 & 332 \\ 40 & 3000 & 480 & 335 \\ 34 & 2770 & 460 & 330 \\ 40 & 3400 & 495 & 330 \\ 40 & 3500 & 500 & 333 \\ 41 & 3430 & 500 & 325 \\ 40 & 3200 & 490 & 314 \\ 41 & 3530 & 500 & 350 \\ 40 & 3310 & 500 & 340 \\ 39 & 3650 & 505 & 345 \\ 40 & 2920 & 505 & 327 \\ 39 & 3120 & 510 & 340 \\ 36 & 3500 & 510 & 335 \\ 39 & 3540 & 515 & 342 \\ 41 & 3640 & 525 & 346 \\ 41 & 4160 & 550 & 370 \\ 40 & 4140 & 535 & 363 \end{pmatrix}$$

$$M(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{1}_{20} / 20 = \begin{pmatrix} 779 \\ 64660 \\ 9905 \\ 6697 \end{pmatrix} / 20 = \begin{pmatrix} 38,95 \\ 3233,00 \\ 495,25 \\ 334,85 \end{pmatrix}$$

$$V(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{X} / n - M(\mathbf{X})M(\mathbf{X})^T =$$

$$\begin{pmatrix} 30427 & 2532510 & 386525 & 261120 \\ 2532510 & 215035800 & 32309200 & 21794920 \\ 386525 & 32309200 & 4921075 & 3323975 \\ 261120 & 21794920 & 3323975 & 2247269 \end{pmatrix} / 20 - M(\mathbf{X})M(\mathbf{X})^T =$$

$$= cov(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 4,471053 & 737,000 & 38,17105 & 14,30789 \\ 737,000000 & 315264,211 & 15070,26316 & 7553,63158 \\ 38,171053 & 15070,263 & 822,30263 & 383,46053 \\ 14,307895 & 7553,632 & 383,46053 & 251,50263 \end{pmatrix}$$

$$Cor(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1,0000000 & 0,6207622 & 0,6295256 & 0,4266773 \\ 0,6207622 & 1,0000000 & 0,9359824 & 0,8482956 \\ 0,6295256 & 0,9359824 & 1,0000000 & 0,8432057 \\ 0,4266773 & 0,8482956 & 0,8432057 & 1,0000000 \end{pmatrix}$$

## 4.2 ANALISI DELLE COMPONENTI PRINCIPALI

$$Z_j = \mathbf{X}\gamma_j \quad j = 1, 2, \dots, p$$

### Prima componente principale

Si può dimostrare che la variabile  $Z_1$  è la combinazione lineare delle  $\mathbf{X}$  (a coefficienti normalizzati) di maggior varianza, e va sotto il nome di *prima componente principale*

$$Z_1 = \mathbf{X}\gamma_1 \quad V[Z_1] = \lambda_1$$

### Seconda componente principale

Si può dimostrare che la variabile  $Z_2$  è la combinazione lineare delle  $\mathbf{X}$  (a coefficienti normalizzati) di maggior varianza, fra tutte quelle non correlate con  $Z_1$  e va sotto il nome di *seconda componente principale*

$$Z_2 = \mathbf{X}\gamma_2 \quad V[Z_2] = \lambda_2 \quad cov(Z_1, Z_2) = 0$$

### Collinearità

Si può dimostrare che la variabile  $Z_p$  è la combinazione lineare delle  $\mathbf{X}$  (a coefficienti normalizzati) di *minor* varianza, e va sotto il nome di *ultima componente principale*

$$Z_p = \mathbf{X}\gamma_p \quad V[Z_p] = \gamma_p$$

$$cov(Z_i, Z_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Per la dimostrazione dei problemi di massimo (e di minimo) vincolati citati rimando alla sezione sull'analisi delle componenti principali per variabili aleatorie, perchè le dimostrazioni sono analoghe [2.2](#)

se installato cercare il [notebook di esempio](#)

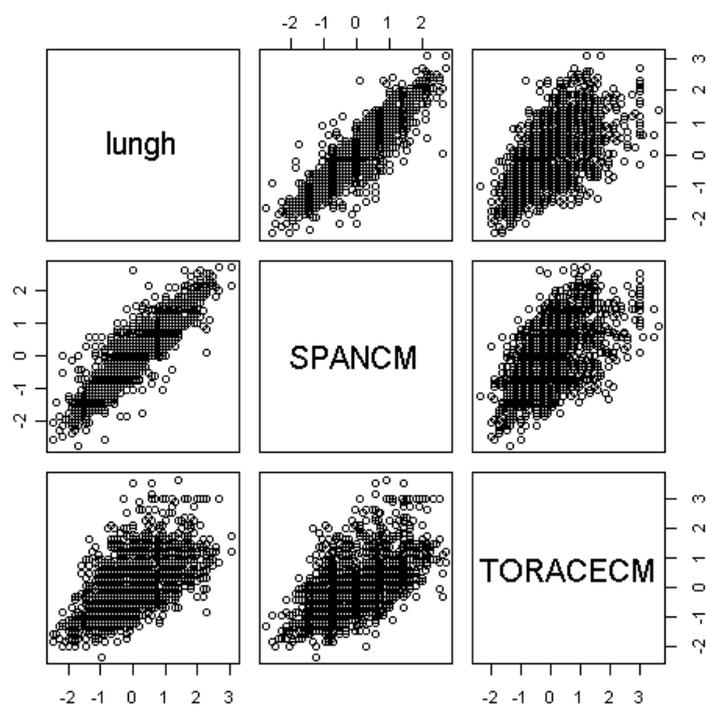


Figura 4.3: Tre variabili standardizzate correlate (matrix plot)

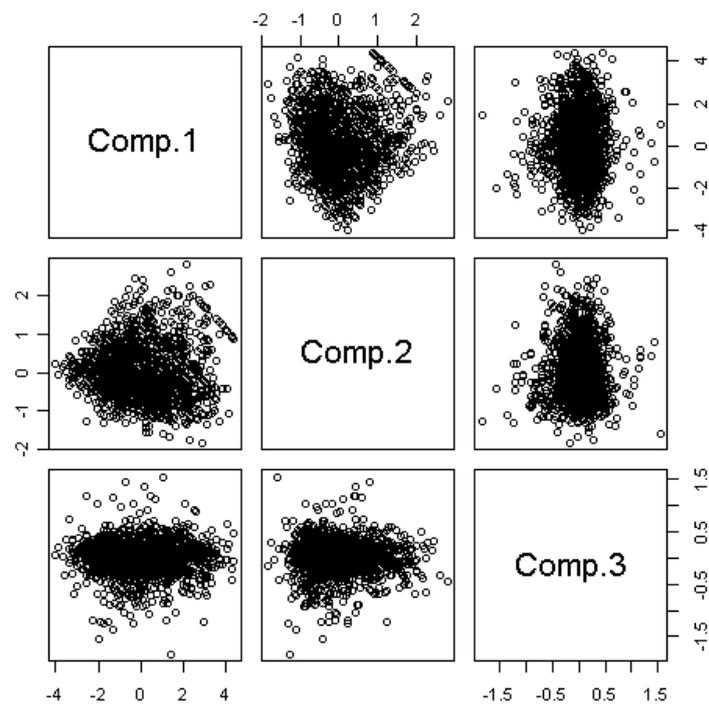


Figura 4.4: Le tre componenti principali (matrix plot)

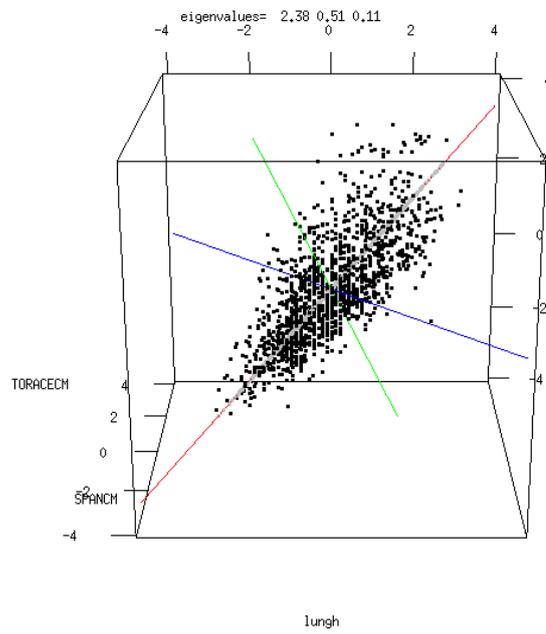


Figura 4.5: Tre variabili standardizzate correlate

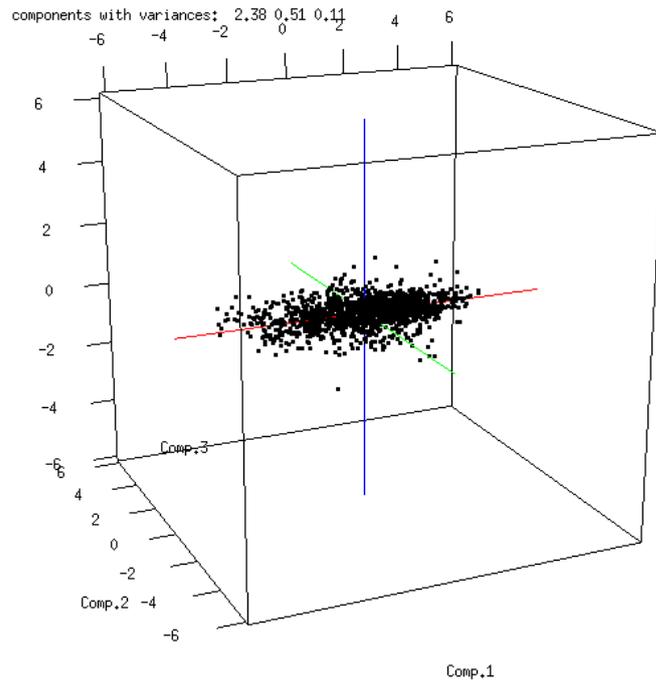


Figura 4.6: Le tre componenti principali

#### 4.2.1 ACP per variabili statistiche osservate

Vale la pena di notare adesso che l'analisi delle componenti principali può essere ancora vista come un problema di determinazione delle combinazioni lineare (non correlate) di massima varianza di variabili statistiche effettivamente osservate, (anche per variabili aleatorie multiple come si vede in altra sezione), oppure come problema di determinazione della combinazione lineare, vincolata, di varianza minima!); oppure come problema di determinazione di un nuovo spazio di riferimento ortogonale.

**Si ottengono comunque, se si prendono tutti gli autovettori, le componenti per la rotazione della matrice dei dati che determinano un nuovo insieme di variabili non correlate.**

Uno degli usi dell'ACP è la cosiddetta riduzione di dimensionalità, ossia la possibilità di riassumere la variabilità di un insieme di dati multivariati con un numero ridotto di componenti.

Se si opera con variabili standardizzate, la somma delle varianze originarie è  $p$ , così come la somma delle varianze delle  $p$  componenti.

Le prime  $m$  componenti sono però quelle che spiegano la maggior parte della varianza complessiva, che possiamo misurare attraverso:

$$f_m = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j}{p}$$

Possiamo considerarlo come un'indice di correlazione globale. Se  $m = 2$  oppure  $m = 3$ , possiamo rappresentare graficamente un insieme di dati di  $n$  unità e  $p$  variabili attraverso una rappresentazione grafica di  $n$  punti in uno spazio a 2 o tre dimensioni, con la possibilità quindi di *vedere* le relazioni fra le unità le loro distanze, eventuali strutture di gruppi, outlier.

Ovviamente tale rappresentazione grafica sarà una buona sintesi delle caratteristiche del nostro insieme multivariato quanto maggiore sarà  $f_m$ .

### Retta di regressione principale

Nel caso di variabili statistiche multiple esiste un'altra possibilità di interpretazione, più vicina alla logica della regressione lineare, senza però assumere che una delle variabili assuma il ruolo di variabile dipendente: ci proponiamo di trovare una retta che passi bene attraverso una nuvola di punti in uno spazio  $p$ -dimensionale, la cosiddetta *retta di regressione principale*

Si supponga di avere una matrice  $n \times p$  di dati  $\mathbf{Z}$  relativa a  $p$  variabili centrate (ossia a medie nulle):  $\mathbf{1}_n^T \mathbf{Z} = \mathbf{0}_p$ ; possibilmente le variabili sono standardizzate, diversamente l'analisi sarebbe influenzata dalle diverse scale e unità di misura delle variabili; tuttavia in questo paragrafo non sarà indispensabile adottare questo vincolo, per cui le variabili hanno varianza qualsiasi.

*Problema:*

Trovare, nello spazio  $p$ -dimensionale definito dalle variabili originali, una retta  $r_1$  di coseni direttori  $\mathbf{y}_1$ , che minimizzi la somma dei quadrati delle distanze dei punti originali  $P_i$  dalla retta, ossia minimizzi la somma dei quadrati delle distanze dalle rispettive proiezioni ortogonali  $\mathbf{Q}_{i1}$ .

Su  $r_1$  gli  $n$  punti proiettati avranno coordinate  $q_{i1} (i = 1, 2, \dots, n)$ ; il vettore di tali coordinate, ossia il vettore dei valori assunti dalla nuova variabile si ottiene ovviamente mediante la proiezione  $q_1 = \mathbf{Z}\mathbf{y}_1$ .

Il vincolo di normalizzazione:  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 = 1$ , è ovvio dato che  $\mathbf{y}_1$  è un vettore dei coseni direttori.

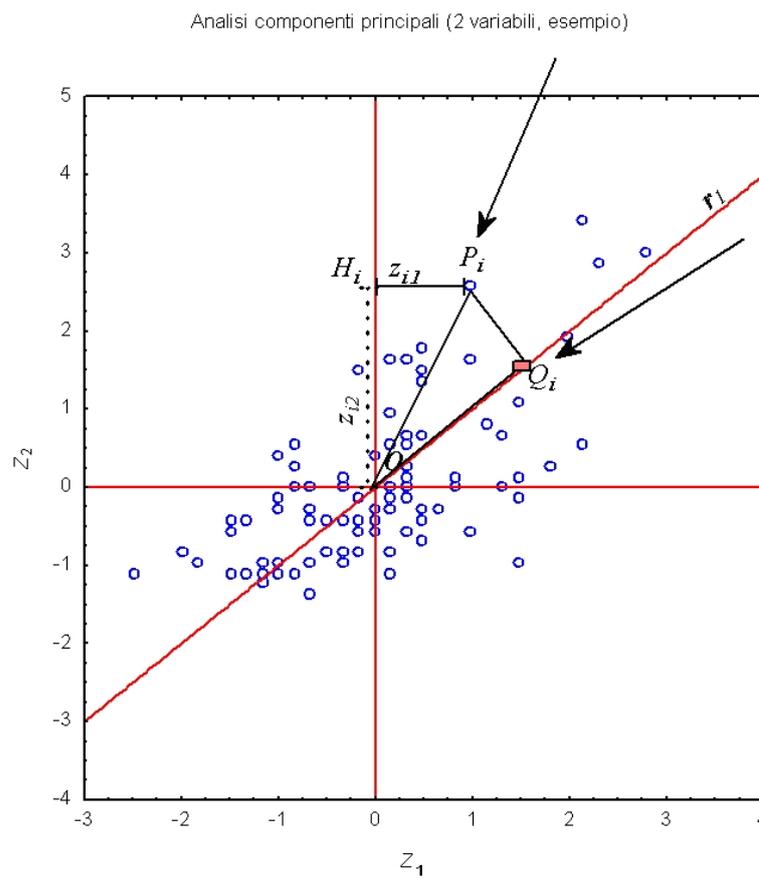


Figura 4.7: Retta di minima distanza (ortogonale!) dai punti osservati: regressione principale

Si noti dalla figura che il quadrato della distanza euclidea di ogni singolo punto  $P_i$  dall'origine  $O$  (baricentro, o centroide, coincide con il vettore delle medie delle  $p$  variabili), può essere espresso come:

$$\overline{OP_i^2} = \overline{OQ_i^2} + \overline{P_iQ_i^2}$$

La misura del segmento  $OQ_i$  è proprio la nuova coordinata  $q_{i1}$   
Inoltre si ha anche palesemente:

$$\overline{OP_i^2} = \overline{OH^2} + \overline{P_iH^2}$$

Uguagliando i secondi membri di tali relazioni pitagoriche, ed esprimendo in termini di coordinate centrate, (ossia a media nulla) nel caso generale di  $p$  coordinate si ha:

$$\sum_{j=1}^p z_{ij}^2 = q_{i1}^2 + \overline{P_iQ_i^2}$$

essendo:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p z_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n q_{i1}^2 + \sum_{i=1}^n \overline{P_iQ_i^2};$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n z_{ij}^2 = Dev(q) + \sum_{i=1}^n \overline{P_iQ_i^2};$$

$$\sum_{j=1}^p Dev(Z_j) \quad \left( = \sum_{j=1}^p \overline{OP_j^2} \right) = Dev(q) + \sum_{i=1}^n \overline{P_iQ_i^2}$$

In questa relazione la somma delle devianze delle variabili originarie (che è anche uguale alla somma delle distanze dei punti dal centroide) è ovviamente invariante rispetto a qualsiasi scelta della retta e pertanto è una costante. Se indichiamo con  $q$  la nuova variabile, massimizzare  $Dev(q)$ , funzione obiettivo dell'ACP, corrisponde a minimizzare  $\sum_{i=1}^n \overline{P_iQ_i^2}$ . Quindi  $r_1$  è la retta che minimizza la somma delle distanze dei punti dalle loro proiezioni ortogonali sulla retta stessa. Chiaramente la soluzione del problema di determinazione di combinazioni lineari di massima varianza (e non correlate) è sempre fornita dagli autovettori della matrice di varianze e covarianze delle variabili originarie:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{n}$$

(che è anche la matrice di correlazione, se le variabili sono standardizzate).

$r_1$  va anche sotto il nome di retta di regressione principale.

E' intuitiva la spiegazione geometrica delle componenti successive, come rette, ortogonali alle precedenti.

è possibile anche un'interpretazione in funzione delle distanze euclidee fra coppie di punti, che per brevità e compattezza di impostazione, ometto

## 4.2.2 Distribuzione campionaria degli autovalori

Solo un accenno alla distribuzione campionaria degli autovalori, nel caso di un campione di ampiezza  $n$  estratto da una normale multivariata di parametri  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

SI può dimostrare, per le note proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza, che che gli autovalori della matrice di varianza e covarianza campionaria,  $\hat{\lambda}$  sono gli stimatori di massima verosimiglianza degli autovalori di  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\lambda$ , ed inoltre si ha, asintoticamente:

$$E[\hat{\lambda}_j] = \lambda_j;$$

$$V[\hat{\lambda}_j] = \frac{2\lambda_j^2}{n}$$

Il risultato sulla varianza campionaria asintotica è intuibile ricordando che  $\hat{\lambda}_j$  è la varianza della  $j$ -esima componente principale, e quindi la sua distribuzione segue quella generale delle varianze empiriche da un campione normale, proporzionale ad una  $\chi^2$

E' invalso dagli anni novanta l'uso di indicare una matrice dei dati  $\mathbf{X}$  come matrice a due vie (unità  $\times$  variabili) per distinguerla dalle cosiddette matrici a tre vie (unità  $\times$  variabili  $\times$  occasioni) in cui per esempio l'elemento  $x_{ijk}$  rappresenta l'osservazione della  $j$ -esima variabile nell' $i$ -esimo individuo nell'occasione  $k$ , se per esempio lo stesso insieme multivariato è stato osservato in diverse occasioni, o in diverse località; evidentemente in questo caso potremo fare diverse sezioni a due vie dei dati, ma non è un argomento che trattiamo in questo corso.

BOZZE MARCELLO CHIODI 2020

### 4.2.3 significato dei primi due momenti multivariati empirici

Resta inteso che il significato da attribuire ai momenti primi e secondi multivariati empirici è diverso secondo che si supponga:

1. di avere un campione proveniente da una distribuzione normale multivariata
2. oppure solo un insieme di dati da una popolazione non specificata

Nel primo caso i momenti primi e secondi empirici sono proprio gli stimatori di massima verosimiglianza dei parametri di una normale multivariata (gli unici parametri di tale distribuzione);

Nel secondo caso i momenti avranno soltanto un valore sintetico o descrittivo e non è detto che siano le migliori misure di media e dispersione multivariata per i dati in esame.

altrove